1. De uma sucessão sabe-se que $v_{n+1} - v_n = n^2 + 1 \,, \forall n \in IN$

Então pode afirmar-se que:

(A) $v_n > 0 \,, \forall n \in IN$

(B) v_n é decrescente

(C) $v_5 < v_4$

(D) $v_2 = 2 + v_1$

2. Sendo u_n uma sucessão de números reais qualquer, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $u_n = u_{n+1} \,, \forall n \in IN$

(B) $(-1)^{2n} \times u_n = u_n \,, \forall n \in IN$

(C) $u_{n+1} = u_n + 1 \,, \forall n \in IN$

(D) $u_{2n} = 2 \times u_n \,, \forall n \in IN$

3. Seja a sucessão definida por $b_n = 2n + 3$

A soma $b_{3n} + b_{n+2}$ é representada por:

(A) $6n + 3$

(B) $8n + 10$

(C) $8n + 6$

(D) $6n + 10$

4. Seja a sucessão definida por $u_n = \frac{3n+1}{1-2n}$

Qual dos seguintes números é termo da sucessão?

(A) -1 **(B)** 1 **(C)** $-\frac{16}{9}$ **(D)** $\frac{37}{23}$

5. Sabendo que $-6 \leq a_n \leq 5 \,, \forall n \in IN$

Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

(A) $|a_n| \leq 5 \,, \forall n \in IN$

(B) $|a_n| \leq 6 \,, \forall n \in IN$

(C) $5 \leq |a_n| \leq 6 \,, \forall n \in IN$

(D) $|a_n| \geq 5 \,, \forall n \in IN$

6. Sendo $v_n = (-1)^n + \frac{n+1}{n}$, tem-se que:

(A) $v_{n+1} - v_n = -2 + \frac{1}{n^2+n}$ se n é par

(B) $v_{n+1} - v_n = 2 - \frac{1}{n^2+n}$ se n é par

(C) $v_{n+1} - v_n = \frac{2}{n^2+n}$ se n é ímpar

(D) $v_{n+1} - v_n = 2 - \frac{1}{n^2+n}$ se n é ímpar

7. Considere a função f, de domínio IR, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x & \text{se } x \leq 1 \\ 5x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Seja a_n a sucessão definida por $a_n = f\left(n - \frac{1}{n}\right)$.

Qual das seguintes expressões define o termo da sucessão a_n ?

(A) $5n - \frac{1}{n}$

(B) $n^2 - \frac{6}{n}$

(C) $5n - \frac{5}{n}$

(D) $n - \frac{1}{n}$

8. Acerca da sucessão u_n sabe-se que $\frac{u_2}{u_1} = 2$ e $\frac{u_3}{u_2} = 2$

Então, pode afirmar-se que:

(A) a sucessão é monótona

(B) a sucessão pode ser crescente

(C) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$

(D) a sucessão pode ser crescente

9. Considere a função f, de domínio IR, definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Seja a_n a sucessão definida por $a_n = f(n-2)$

Indique qual das expressões seguintes define o termo geral de a_n

(A) $-(n-2)^2$

(B) $(n-2)^2 - n$

(C) $-n + 2$

(D) $4 - 4n - n^2$

10. Considere a sucessão de termo geral $a_n = -n^2 + 2n$.

10.1 Calcule a soma dos três primeiros termos.

10.2 Verifique se -8 é termo da sucessão.

10.3 A partir de que ordem são negativos os termos da sucessão?

10.4 Determine *n* de modo que $a_n \leq -80$.

11. Observe a sequência de números pentagonais 1 , 5 , 12 , 22 , 35 , 51 , ...

11.1 Sendo a_n o número pentagonal de ordem *n* , verifique que, para $n \leq 4$, se tem

$$a_n = \frac{3n^2 - n}{2} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 3n - 2 \, , \forall n \geq 2 \end{cases}$$

11.2 Admitindo que as igualdades apresentadas também são válidas para $n > 4$, verifique se há na sequência um número 145.

12. Estude quanto à monotonia as sucessões definidas por:

12.1 $a_n = \frac{1}{n+2} - 3$

12.2 $a_n = (-1)^n \times 3n + 1$

12.3 $a_n = -2 + 3(n-1)^2$

12.4 $a_n = \begin{cases} 3n - 1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 3n - 2 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

12.5 $a_n = n^2 - 6n$

12.6 $f_n = 1 + |2n - 11|$

13. Considere as funções f e g , de domínio IR , definidas por

$$f(x) = x^2 - 2x \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 - 4x + 3$$

13.1 Utilize a calculadora gráfica e faça um esboço de cada uma das funções.

13.2 Utilizando **13.1** , o que se pode concluir acerca da monotonia das sucessões u_n e v_n , sendo

$$u_n = n^2 - 2n \quad \text{e} \quad v_n = n^2 - 4n + 3$$

13.3 Se soubermos que a sucessão $f(n)$ é monótona, podemos concluir que a função $f(x)$, real de variável real, definida pela mesma expressão algébrica é monótona? Justifique utilizando um gráfico.

14. Uma sucessão a_n satisfaz a seguinte condição $a_{n+1} - a_n = 3n^2 - 15n + 18$

14.1 O que pode concluir quanto à monotonia da sucessão?

14.2 A sucessão tem três termos iguais a zero.

Qual a ordem desses termos?

Explique o raciocínio.

15. Escreva o termo geral de um sucessão que seja crescente a partir do 5.º termo e que $u_5 < u_4$

16. É dada a sucessão de termo geral $a_n = 1 - \frac{3}{2n}$

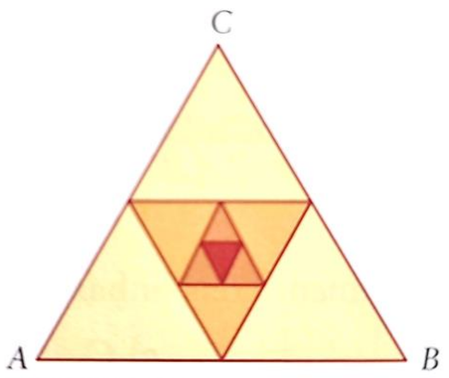
Justifique que a sucessão é crescente.

17. Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{2n^2+6}{4}$

17.1 Verifique que 51,5 é um termo da sucessão.

17.2 Determine o número de termos que são maiores do que 100 e menores do que 500.

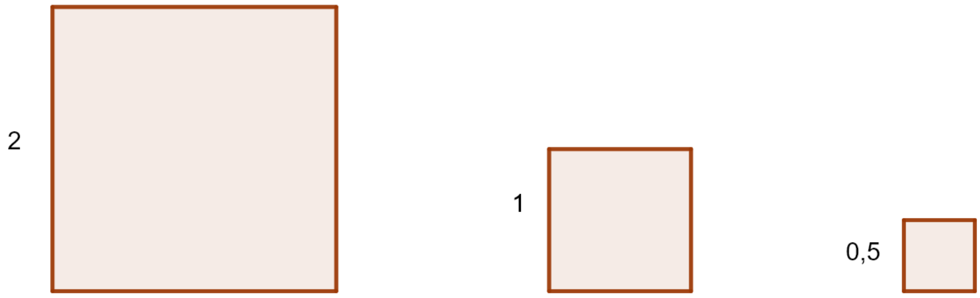
18. Na figura está representado, T_1 , um triângulo equilátero $[ABC]$, de área 1 .



Unindo os pontos médios dos lados de T_1 obtém-se outro triângulo equilátero T_2 . Repetindo o processo obtém-se a sucessão dos triângulos T_n que a figura sugere.

Defina por recorrência a sucessão a_n das áreas dos triângulos T_n .

19. Observe a sucessão das figuras seguintes.



Admita que o lado do primeiro quadrado mede 2 cm ; o lado do segundo quadrado mede 1 cm ; o do terceiro quadrado 0,5 cm ; ... Cada quadrado, a partir do segundo, tem o comprimento do lado igual a metade do comprimento do lado do quadrado anterior.

19.1 Qual é a área do 5.º quadrado? E do 6.º quadrado?

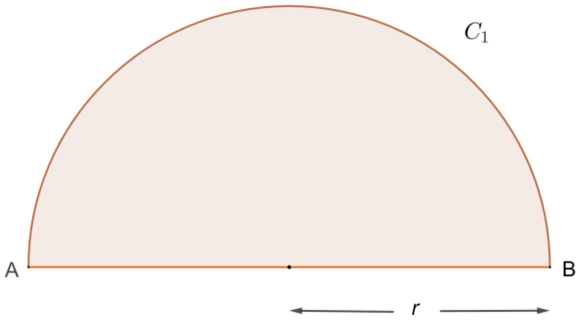
19.2 Relativamente às áreas calculadas determine a razão entre a área do quadrado de ordem $\boldsymbol{n+1}$ e a área do quadrado de ordem $\boldsymbol{n}$.

19.3 Defina por recorrência a sucessão $\boldsymbol{a_n}$ em que o termo de ordem $\boldsymbol{n}$ é a área do enésimo quadrado.

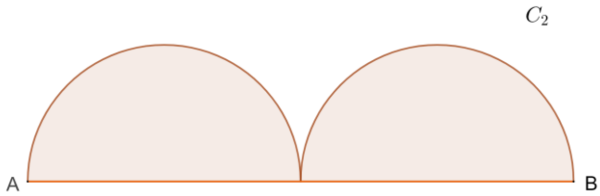
20. Observe as figuras seguintes construídas a partir de um segmento de reta $[AB]$.

Sabe-se que: $r = \frac{\overline{AB}}{2}$.

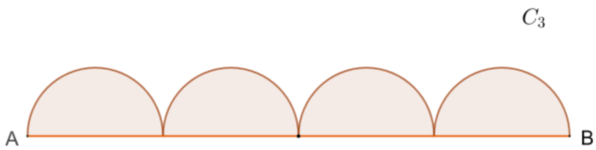
- A linha C_1 é uma semicircunferência de raio r .



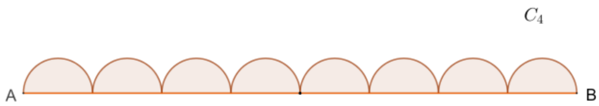
- A linha C_2 é formada por duas semicircunferências geometricamente iguais.



- A linha C_3 é formada por quatro semicircunferências geometricamente iguais.



- A linha C_4 é formada por oito semicircunferências geometricamente iguais.



20.1 Escreva em função de r , o comprimento das linhas:

a) C_1 **b)** C_2

C) C_3 **d)** C_4

20.2 Determine a área definida pela linha e pelo segmento de reta $[AB]$, ou seja, a região representada a cor:

a) Na linha C_1 (A_1) **b)** Na linha C_2 (A_2)

c) Na linha C_3 (A_3) **d)** Na linha C_4 (A_4)

20.3 Considere a sucessão A_n em que os quatro primeiros termos são A_1 , A_2 , A_3 **e** A_4 calculados em **20.2**.

Mantendo a regularidade definida, ou seja, cada figura a partir da segunda tem o dobro dos semicírculos da figura anterior, todos são geometricamente iguais e a soma dos correspondentes diâmetros é igual a $\overline{AB}$, define, por recorrência, esta sucessão que se designou por A_n .

20.4 Qual será o 6.º termo da sucessão definida em **20.4**

21. Observe a sucessão das figura seguintes:

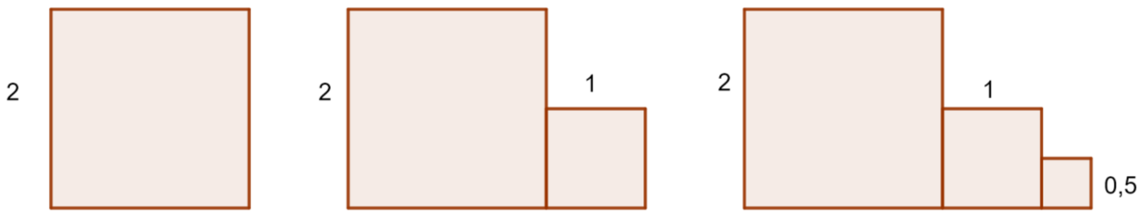


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

Admita que a figura 1 é um quadrado cujo lado mede 2 cm ; a figura 2 é formada por dois quadrados, um com 2 cm de lado e o outro com 1 cm de lado ; a figura 3 é formada por três quadrados com 2 cm , 1 cm e 0,5 cm de lado, respetivamente.

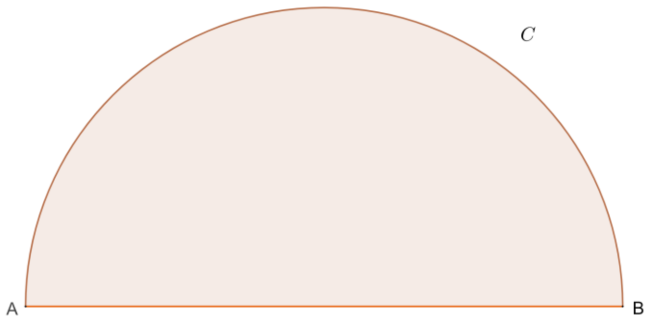
Admita que se mantém a regularidade descrito na formação das figuras seguintes e designa por a_n a área, em centímetros quadrados, da figura de ordem n .

21.1 Determine a_1 , a_2 e a_3 .

21.2 Verifique que a razão entre as áreas consecutivas não é constante.

21.3 Defina por recorrência a sucessão a_n .

22. Considere C um semicírculo de diâmetro $[AB]$ sendo $\overline{AB} = 20$ cm.



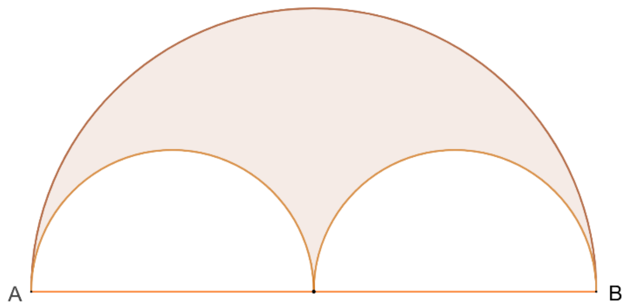


Fig. 1

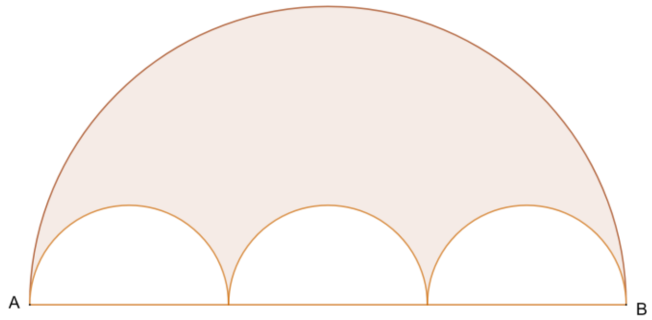


Fig. 2

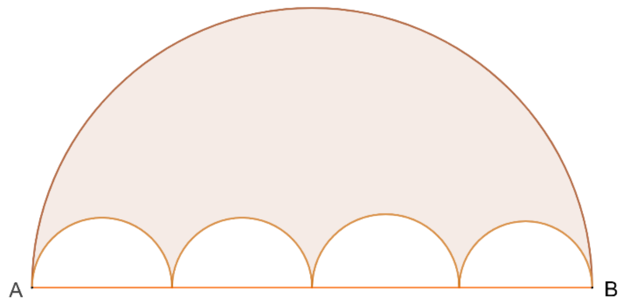


Fig. 3

Para obter a figura 1 dividiu-se o segmento de reta $[AB]$ em duas partes iguais e desenharem-se dois semicírculos em que o diâmetro de cada um é metade do comprimento de $[AB]$.

Para obter a figura 2 dividiu-se o segmento de reta $[AB]$ em três partes iguais e desenharam-se três semicírculos em que o diâmetro é a terça parte do comprimento de $[AB]$.

Para obter a figura 3 dividiu-se o segmento de reta $[AB]$ em quatro partes iguais e desenharam-se quatro semicírculos cujo diâmetro é a quarta parte do comprimento de $[AB]$.

Considere a_1 , a_2 , a_3 **e** a_n a área da região colorida a vermelho, respetivamente das figuras 1 , 2 , 3 e n

22.1 Determine o valor exato de a_1 , a_2 **e** a_3 .

22.2 Faça um esboço da figura 4 e calcula a_4 .

22.3 Relativamente à figura n , divide-se o segmento de reta $[AB]$ em $n+1$ partes iguais desenham-se $n+1$ semicírculos iguais.

Mostre que $a_n = 50\pi \times \frac{n}{n+1}$

22.4 Considere a sucessão referida em **22.3** e estuda-a quanto à monotonia.

22.6 Com a ajuda da calculadora gráfica calcule a_{100} e a_{1000} .

Efetue uma conjetura para o comportamento dos termos da sucessão a_n à medida que n tende para $+\infty$.