SUCESSÕES – GENERALIDADES 2 MD

1. Estuda a monotonia das sucessões $\boldsymbol{a_n}$ e $\boldsymbol{b_n}$, cujos termos gerais são, $\boldsymbol{a_n = n+1}$ e $\boldsymbol{b_n = \frac{3}{n+1}}$.

$\boldsymbol{a_{n+1} - a_n = n+2-n-1 = 1}$ como $\boldsymbol{a_{n+1} - a_n > 0}$, $\forall \boldsymbol{n \in IN}$ a sucessão é monótona crescente.

$\boldsymbol{b_{n+1} - b_n = \frac{3}{n+2} - \frac{3}{n+1} = \frac{3n+3-3n-6}{(n+2)(n+1)} = \frac{-3}{(n+2)(n+1)}}$, como $\boldsymbol{-3 < 0 \wedge (n+2)(n+1) > 0, \forall n \in IN}$

Então, $\boldsymbol{\frac{-3}{(n+2)(n+1)} < 0, \forall n \in IN}$, a sucessão é monótona decrescente.

2. Calcula os três primeiros termos das sucessões definidas como se segue:

2.1 $a_n = \frac{n+1}{2n}$

$a_1 = \frac{1+1}{2\times 1} = 1$; $a_2 = \frac{2+1}{2\times 2} = \frac{3}{4}$; $a_3 = \frac{3+1}{2\times 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

2.2 $b_n = \frac{3n}{n+1}$

$b_1 = \frac{3\times 1}{1+1} = \frac{3}{2}$; $b_2 = \frac{3\times 2}{2+1} = \frac{6}{3} = 2$; $b_3 = \frac{3\times 3}{3+1} = \frac{9}{4}$

2.3 $c_n = \frac{(-1)^n n}{5n}$

$c_1 = \frac{(-1)^1\times 1}{5\times 1} = -\frac{1}{5}$; $c_2 = \frac{(-1)^2\times 2}{5\times 2} = \frac{1}{5}$; $c_2 = \frac{(-1)^3\times 3}{5\times 3} = -\frac{1}{5}$

2.4 $d_n = \begin{cases} 1 & , n \geq 3 \\ \frac{2}{n+1} & , n < 3 \end{cases}$

$d_1 = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$; $d_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$; $d_3 = 1$

3. Considera a sucessão $\boldsymbol{a_n}$ de termo geral $\boldsymbol{a_n = \frac{n+1}{3n}}$

3.1 Escreve os quatro primeiros termos da sucessão.

$a_1 = \frac{1+1}{3\times 1} = \frac{2}{3}$; $a_2 = \frac{2+1}{3\times 2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$a_3 = \frac{3+1}{3\times 3} = \frac{4}{9}$; $a_4 = \frac{4+1}{3\times 4} = \frac{5}{12}$

3.2 Escreve o termo de ordem $\boldsymbol{n+1}$

$$a_{n+1} = \frac{n+1+1}{3(n+1)} = \frac{n+2}{3n+3}$$

3.3 Determina $\boldsymbol{a_{n+1} - a_n}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{3n+3} - \frac{n+1}{3n} = \frac{n+2}{3(n+1)} - \frac{n+1}{3n} =$$

$$= \frac{n(n+2) - (n+1)(n+1)}{3n(n+1)} = \frac{n^2 + 2n - (n^2 + 2n + 1)}{3n(n+1)}$$

$$= \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{3n(n+1)} = \frac{-1}{3n(n+1)}$$

4. Mostra que as sucessões $\boldsymbol{a_n = (n-2)^2}$ e $\boldsymbol{b_n = n^2 - 8n}$ não são monótonas.

$a_1 = (1-2)^2 = 1$; $a_2 = (2-2)^2 = 0$; $a_3 = (3-2)^2 = 1$

A sucessão (a_n) é não monótona, pois, $a_1 > a_2$ mas $a_2 < a_3$.

$b_1 = 1^2 - 8 \times 1 = -7$; $b_2 = 2^2 - 8 \times 2 = -12$;

$b_3 = 3^2 - 8 \times 3 = -13$; $b_4 = 4^2 - 8 \times 4 = -16$;

$b_5 = 5^2 - 8 \times 5 = -15$

A sucessão (b_n) é não monótona, pois, $b_3 > b_4$ mas $b_4 < b_5$.

5. Estuda quanto à monotonia as sucessões definidas por:

5.1 $\boldsymbol{u_n = \frac{n+1}{3n}}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{3n+3} - \frac{n+1}{3n} = \frac{n+2}{3(n+1)} - \frac{n+1}{3n} =$$

$$= \frac{n(n+2) - (n+1)(n+1)}{3n(n+1)} = \frac{n^2 + 2n - (n^2 + 2n + 1)}{3n(n+1)}$$

$$= \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{3n(n+1)} = \frac{-1}{3n(n+1)}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$, logo (u_n) é decrescente.

5.2 $\boldsymbol{w_n = 5\left(\frac{4}{5}\right)^n}$

$$w_{n+1} - w_n = \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} - \left(\frac{4}{5}\right)^n = \left(\frac{4}{5}\right)^n \times \left(\frac{4}{5} - 1\right) = -\frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n < 0$, logo (w_n) é decrescente.

5.3 $\boldsymbol{v_n = \frac{3n-4}{n}}$

$$v_{n+1} = \frac{3(n+1) - 4}{n+1} = \frac{3n-1}{n+1}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{3n-1}{n+1} - \frac{3n-4}{n} = \frac{n(3n-1) - (n+1)(3n-4)}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{3n^2 - n - (3n^2 - 4n + 3n - 4)}{n(n+1)} = \frac{3n^2 - n - 3n^2 + n + 4}{n(n+1)} = \frac{4}{n(n+1)}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n > 0$, logo (v_n) é crescente.

5.4 $t_n = \frac{2n+1}{2n-1}$

$$t_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{2(n+1)-1} = \frac{2n+3}{2n+1}$$

$$t_{n+1} - t_n = \frac{2n+3}{2n+1} - \frac{2n+1}{2n-1} =$$

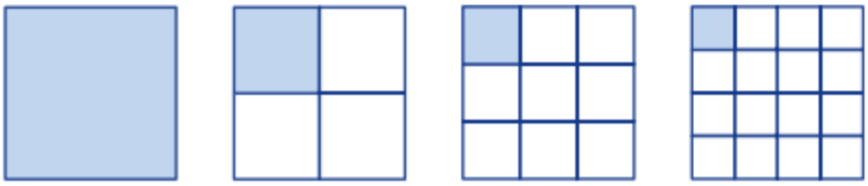
$$= \frac{(2n-1)(2n+3)-(2n+1)(2n+1)}{(2n+3)(2n-1)} =$$

$$= \frac{4n^2-6n-2n-3-(4n^2+4n+1)}{(2n+3)(2n-1)}$$

$$= \frac{4n^2+6n-2n-3-4n^2-4n-1}{(2n+3)(2n-1)} = \frac{-4}{(2n+3)(2n-1)}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} - t_n > 0$, logo (t_n) é decrescente.

6. Considera uma sucessão de figuras, das quais se apresentam a seguir as quatro primeiras, para ilustrar a respetiva lei de formação. Nesta sucessão de figuras, os quadro maiores têm 16 cm de lado e cada figura, a partir da segunda, está dividida em quadrados geometricamente iguais.



6.1 Escreve os primeiros cinco termos das sucessões seguintes:

$\boldsymbol{Q_n}$: Número de quadrados de cada figura.

Q_n : 1 , 4 , 9 , 16 , 25

$\boldsymbol{L_n}$: Comprimento dos lados do quadrado colorido em cada figura.

L_n : 16 , 8 , $\frac{16}{3}$, 4 , $\frac{16}{5}$

$\boldsymbol{A_n}$: Área do quadrado colorido em cada figura.

A_n : 256 , 64 , $\frac{256}{9}$, 16 , $\frac{256}{25}$

$\boldsymbol{P_n}$: Perímetro do quadrado colorido em cada figura.

P_n : 64 , 32 , $\frac{64}{3}$, 16 , $\frac{64}{5}$

6.2 Escreve o termo geral de cada uma das sucessões anteriores.

$$Q_n = n^2 \;;\; L_n = \frac{16}{n} \;;\; A_n = \left(\frac{16}{n}\right)^2 \;;\; P_n = \frac{64}{n}$$

6.3 Estuda cada uma das sucessões anteriores em relação à monotonia.

$$Q_{n+1} - Q_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $Q_{n+1} - Q_n > 0$, logo (Q_n) é crescente.

$$L_{n+1} - L_n = \frac{16}{n+1} - \frac{16}{n} = \frac{16n - 16(n+1)}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{16n - 16n - 16}{n(n+1)} = \frac{-16}{n(n+1)}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $L_{n+1} - L_n < 0$, logo (L_n) é decrescente.

$$A_{n+1} - A_n = \left(\frac{16}{n+1}\right)^2 - \left(\frac{16}{n}\right)^2 = \frac{16^2 n^2 - 16^2 (n+1)^2}{(n+1)^2} =$$

$$= \frac{16^2 n^2 - 16^2 (n^2 + 2n + 1)}{(n+1)^2} = \frac{16^2 n^2 - 16^2 n^2 - 16^2 (2n+1)}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{-16^2 (2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{-256(2n+1)}{(n+1)^2}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} - A_n < 0$, logo (A_n) é decrescente.

$$P_{n+1} - P_n = \frac{64}{n+1} - \frac{64}{n} = \frac{64n - 64(n+1)}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{64n - 64n - 64}{n(n+1)} = \frac{-64}{n(n+1)}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} - P_n < 0$, logo (P_n) é decrescente.

7. Considera a sucessão $a_n = \frac{5}{\sqrt{n}+2}$

Mostra que a sucessão é monótona decrescente.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{5}{\sqrt{n+1}+2} - \frac{5}{\sqrt{n}+2} =$$

$$= \frac{5\left(\sqrt{n}+2\right) - 5\left(\sqrt{n+1}+2\right)}{\left(\sqrt{n+1}+2\right)\left(\sqrt{n}+2\right)} = \frac{5\overbrace{\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)}^{<0 \text{ porque } \sqrt{n}<\sqrt{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}}}{\underbrace{\left(\sqrt{n+1}+2\right)\left(\sqrt{n}+2\right)}_{>0}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n < 0$, logo (a_n) é monótona decrescente.

8. Seja a sucessão de termo geral $u_n = \frac{3n-2}{n+1}$

8.1 Determina u_1

$$u_1 = \frac{3\times 1 - 2}{1+1} = \frac{1}{2}$$

8.2 Determina o termo de ordem 3 da sucessão u_n

$$u_3 = \frac{3\times 3 - 2}{3+1} = \frac{7}{4}$$

8.3 Determina $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3(n+1)-2}{n+1+1} - \frac{3n-2}{n+1} = \frac{3n+1}{n+2} - \frac{3n-2}{n+1} =$$

$$= \frac{(3n+1)(n+1) - (n+2)(3n-2)}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{3n^2 + 3n + n + 1 - (3n^2 + 2n - 6n - 4)}{(n+1)(n+2)} = \frac{5}{(n+1)(n+2)}$$

8.4 O que podes concluir da monotonia da sucessão u_n?

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$; logo, a sucessão é crescente.

1. Considera a sucessão definida por $v_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$

9.1 Indica os seis primeiros termos da sucessão.

$v_1 = 2 + \frac{(-1)^1}{1} = 2 - 1 = 1$; $v_2 = 2 + \frac{(-1)^2}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$;

$v_3 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$; $v_4 = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$; $v_5 = 2 - \frac{1}{5} = \frac{9}{5}$; $v_6 = 2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6}$

9.2 O que podes concluir da monotonia da sucessão?

A sucessão não é monótona pois $v_1 < v_2$ mas $v_2 > v_3$.

9.3 Mostra que $\forall n \in IN, 1 \leq v_n \leq \frac{5}{2}$

Os termos de ordem par são dados pela expressão $2 + \frac{1}{n}$.

Para n par, temos $2 < v_n \leqslant \frac{5}{2}$

$\left(v_n \leqslant \frac{5}{2}\right.$, pois (v_n), com n par, é decrescente$\left.\right)$.

Os termos de ordem ímpar são dados pela expressão $2 - \frac{1}{n}$.

Para n ímpar, temos $1 \leqslant v_n < 2$

($v_n \geqslant 1$, pois (v_n), com n ímpar, é crescente).

Conclui-se, portanto, que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant u_n \leqslant \frac{5}{2}$.

eduardo.pinhao@matematicaparatodos.pt