PROBLEMAS DE CONTAGEM 4 **MD**

1. A turma da Leonor tem 25 alunos, dos quais 13 estão inscritos nas aulas de Espanhol e os restantes estão inscritos nas aulas de Francês.

Determine o número de maneiras diferentes de escolher o delegado e o subdelegado de turma se:

1.1. não existir qualquer restrição;

$25 \times 24 = 600$

1.2. ambos estiverem inscritos na mesma disciplina;

Dois alunos inscritos em Espanhol: 13×12

ou

dois alunos inscritos em Françês: 12×11

$13 \times 12 + 12 \times 11 = 288$

1.3. estiverem inscritos em disciplinas diferentes;

O número de maneiras diferentes de escolher um delegado inscrito em Espanhol e um subdelegado inscrito em Françês é 13×12

Como o contrário também é possível temos $13 \times 12 \times 2 = 312$

1.4. a Leonor ocupar um dos cargos.

Como a Leonor tem de ocupar um dos cargos, existem duas possibilidades, delegada ou subdelegada, para o cargo que sobra existem 24 alunos, logo $2 \times 24 = 48$ é o número de maneiras diferentes de escolher dois alunos, sendo que um deles é a Leonor.

2. O João foi com o pai ver um jogo da seleção nacional.

Com as letras da palavra PORTUGAL quantas palavras de quatro letras, sem as repetir, pode o João formar se:

2.1. Não há restrições?

PORTUGAL tem oito letras e são todas diferentes

Assim, $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$

2.2. A primeira letra é uma vogal?

Como a primeira letra é uma vogal temos 3 hipóteses, O , U ou A. Para a segunda 7, para a terceira 6 e para a quarta 5.

$3 \times 7 \times 6 \times 5 = 630$

2.3. A última letra não pode ser P ?

Como são impostas condições à última letra, é por aí que devemos começar a contar.

Última letra, todas exceto a letra P (7)

Primeira letra, todas exceto a última (7)

Segunda letra, todas, exceto a última e a primeira (6)

Terceira letra, todas, exceto as restantes já colocadas (5)

$7\times6\times5\times7=1470$

2.4. Começa e termina com uma consoante?

Vamos começar pela primeira e a última letra, porque são as que têm restrições.

$\boxed{5}$ $\boxed{}$ $\boxed{}$ $\boxed{4}$

Para as letras do meio, são as que sobram.

Logo, $5\times6\times5\times4=600$

2.5. As duas letras nas posições centrais são as únicas vogais?

Como temos três vogais, as duas letras do meio têm $3\times2=6$ maneiras diferentes de serem colocadas.

A primeira letra e a última, só podem ser consoantes, que são 5, logo existem $5\times4=20$, maneiras diferentes de serem utilizadas.

Portanto, $6\times20=120$

2.6. As vogais **A** e **O** são escolhidas e ficam seguidas?

As vogais O e A têm que ser escolhidas e seguidas, logo existem, $(4-2+1=3)$ de serem colocadas nos 4 espaços. Como podem trocar entre si, exitem $3\times2=6$, formas de serem utilizadas.

Sobram, 2 espaços para as restantes letras, isto é, $6\times5=30$, formas diferentes de as colocar.

Portanto o João pode formar $6\times30=180$ palavras.

3. Uma sequência de algarismos cuja leitura da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita é o mesmo número designa-se por *capicua*. Por exemplo 1234321 é uma capicua.

Quantos números com sete algarismos:

3.1. São capicuas?

O primeiro algarismo não pode ser 0 e como há repetições, temos:

9	10	10	10	1	1	1
Não pode ter o algarismo 0	Pode ser de 0 a 9	Pode ser de 0 a 9	Pode ser de 0 a 9	Igual ao 3.º	Igual ao 2.º	Igual ao 1.º

$9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$

$\boxed{9}$ $\boxed{10}$ $\boxed{10}$ $\boxed{10}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$ $\boxed{1}$

$9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9000$

3.2. São capicuas em que quatro dos algarismos são diferentes?

9	9	8	7	1	1	1
Não pode ter o algarismo 0	Pode ter 0 mas tem que ser diferente do primeiro	Tem que ser diferente do 1.º e do 2.º	Tem que ser diferente do 1.º , do 2.º e do 3.º	Igual ao 3.º	Igual ao 2.º	Igual ao 1.º

$9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$

4. Considere todos os números de seis algarismos que se pode formar utilizando alguns ou todos os algarismos do número 103245.

Destes números quantos:

4.1. São múltiplos de 5?

5	6	6	6	6	2
não pode 0	qualquer um dos 6	qualquer um dos 6	qualquer um dos 6	qualquer um dos 6	pode ser 0 ou 5

$5 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6 \times 2 = 12960$

4.2. Têm os três primeiros algarismos ímpares e diferentes e os três algarismos seguintes pares e iguais entre si?

3	2	1	3	1	1
	diferente	diferente		igual	igual
(1,3,5)	do anterior	do anterior	(0,2,4)	ao anterior	ao anterior

$3\times2\times1\times3\times1\times1=18$

4.3. São formados apenas pelos algarismos 0 e 1, com pelo menos um 0 e um 1.

1	2	2	2	2	2
só pode					
ser o 1	0 ou 1	0 ou 1	0 ou 1	0 ou 1	0 ou 1

$1\times2\times2\times2\times2\times2=32$

A esta possibilidade temos que retirar a hipótese em que todos são 1, que é só de uma forma.

Logo existem $32-1=31$

5. O Bernardo vai criar uma *password* de cinco caracteres para acesso a uma conta na Internet utilizando algarismos de **0** a **9** e caracteres especiais escolhidos entre os símbolos **!** , **@** , **#** , **$** , **%** , ***** e **&**.

Quantas *passwords* pode criar com:

5.1. Dois algarismos iguais seguidos e três símbolos diferentes?

$10\times1=10$, qualquer um dos 10 algarismos e o seguinte igual.

Como existem $5-2+1=4$ espaços para os colocar temos $10\times4=40$, possibiliades para os algarismos.

Sobram 3 espaços para colocar cada um dos 7 símbolos, e como têm que ser diferentes, existem$7\times6\times5=210$ maneiras.

Portanto, existem $40\times210=8400$ *passwords* possíveis.

5.2. Dois símbolos diferentes e três algarismos sabendo que não podem ficar dois algarismos seguidos?

Como os algarismos não podem ficar seguidos, estes vão ocupar as posições 1, 3 e 5.

As posições 2 e 4 vão ser ocupadas por símbolos diferentes.

Algarismo		Símbolo		Algarismo		Símbolo		Algarismo	
10	$\times$	7	$\times$	10	$\times$	6	$\times$	10	$=42000$

5.3. Três algarismos diferentes e dois símbolos iguais seguidos, no início e ou no fim?

Temos duas hipóteses para colocar os símbolos no início ou no fim e como são iguais, temos $2\times7\times1=14$.

Para os três algarismos diferentes temos $10\times9\times8=720$

Portanto o Bernardo pode criar $14\times720=10080$ *passwords*.

6. A direção da Associação de Estudantes da escola da Bia é constituída por três raparigas e dois rapazes. A Bia é a presidente da direção.

6.1. Os membros da direção vão colocar-se em duas filas para tirarem uma fotografia. Combinaram que:

- os rapazes ficam na fila de trás;
- as raparigas ficam na fila da frente.

De quantas maneiras diferentes se podem colocar:

6.1.1. sem outras restrições?

$$\underset{\substack{\text{Maneiras}\\\text{de colocar}\\\text{os rapazes}}}{2\times1}\times\underbrace{3\times2\times1}_{\substack{\text{Maneiras}\\\text{de colocar}\\\text{as raparigas}}}=12$$

6.1.2. ficando a Bia no meio?

$$\underset{\substack{\text{Maneiras}\\\text{de colocar}\\\text{os rapazes}}}{2\times1}\times\underset{\substack{\text{Maneiras}\\\text{de colocar}\\\text{as 2 raparigas}}}{2\times1}=4$$

6.2. Os membros da direção vão colocar-se numa única fila para tirarem outra fotografia.

De quantas maneiras diferentes se podem colocar na fila de forma que:

6.2.1. as três raparigas fiquem seguidas e os dois rapazes fiquem seguidos?

Podem ser raparigas - rapazes ou rapazes - raparigas, duas formas.

$$2\times\underbrace{3\times2\times1}_{\substack{\text{Maneiras}\\\text{de colocar}\\\text{as raparigas}}}\times\underset{\substack{\text{Maneiras}\\\text{de colocar}\\\text{os rapazes}}}{2\times1}=24$$

6.2.2. as três raparigas fiquem seguidas?

Existem $5-3+1=3$ maneiras de colocar as três raparigas juntas (início, meio ou fim)

$$3\times\underbrace{3\times2\times1}_{\substack{\text{Maneiras}\\\text{de colocar}\\\text{as raparigas}}}\times\underset{\substack{\text{Maneiras}\\\text{de colocar}\\\text{os rapazes}}}{2\times1}=36$$

6.2.3. os dois rapazes fiquem seguidos?

Existem $5-2+1=4$ maneiras de colocar os rapazes.

$$4\times\underset{\substack{\text{Maneiras}\\\text{de colocar}\\\text{os rapazes}}}{2\times1}\times\underbrace{3\times2\times1}_{\substack{\text{Maneiras}\\\text{de colocar}\\\text{as raparigas}}}=48$$

7. Um sistema de catalogação de livros utiliza códigos no formato **LAAAL**, onde:

- **L** representa uma letra do alfabeto (26 letras);
- **A** representa um algarismo (0 a 9).

Quantos códigos pode o sistema gerar?

$$\boxed{\begin{matrix}\text{letra}\\26\end{matrix}}\times\boxed{\begin{matrix}\text{Algarismo}\\10\end{matrix}}\times\boxed{\begin{matrix}\text{Algarismo}\\10\end{matrix}}\times\boxed{\begin{matrix}\text{Algarismo}\\10\end{matrix}}\times\boxed{\begin{matrix}\text{letra}\\26\end{matrix}}=676000 \text{ códigos distintos}$$

8. A Ana tem 12 livros distintos: 5 romances, 4 de banda desenhada e 3 policiais.
A Ana pretende escolher dois desses livros e géneros diferentes, para ler nas férias.
Quantas escolhas diferentes pode fazer?

$$\underbrace{5\times4}_{\substack{\text{1 Romance}\\ \text{1 BD}}} + \underbrace{5\times3}_{\substack{\text{1 Romance}\\ \text{1 policial}}} + \underbrace{4\times3}_{\substack{\text{1 BD}\\ \text{1 policial}}} = 47$$

9. Os códigos dos cofres fabricados por uma determinada empresa consistem numa sequência de 4 algarismos, como por exemplo, 0343.
Um cliente vai comprar um cofre dessa empresa e pede que o respetivo código satisfaça as seguintes condições:

- tenha exatamente três algarismos 8;
- a soma dos seus quatro algarismos seja inferior a 29.

Quantos códigos diferentes existem nestas condições?

Como têm que existir, exatamente, 3 algarismos 8 e a soma dos 4 tem que ser inferior a 29, temos que $8+8+8+x<29 \Leftrightarrow 24+x<29 \Leftrightarrow x<29-24 \Leftrightarrow x<5$

Logo, $\underbrace{4}_{\substack{\text{4 posições}\\ \text{para o}\\ \text{algarismo}\\ \text{inferior a 5}}} \times \left(1\times1\times1\times \underbrace{5}_{\substack{0\,,\,1\,,\,2\\ 3\text{ ou }4}}\right) = 20$ códigos

10. De quantas maneiras se podem colocar os quatro cavalos (dois pretos e dois brancos) num tabuleiro de xadrez, de modo que os cavalos brancos fiquem na mesma linha horizontal e os cavalos pretos fiquem numa outra linha horizontal.

Um tabuleiro de xadrez tem oito linhas e oito colunas, ou seja é 8×8,
assim existem 8 maneiras de escolher uma das oito linhas, e depois de escolhida a linha há ${}^{8}C_2$ formas de escolher a coluna.
Despois de escolhidas as posições dos cavalos brancos sobram 7 linhas e da mesma forma há ${}^{8}C_2$ formas de colocar os cavalos pretos na linha escolhida.
Portanto, existem $8\times{}^{8}C_2\times7\times{}^{8}C_2 = 43\,904$ maneiras, nas condições pedidas, de colocar os cavalos.

11. Seja A o conjunto de todos os números naturais com cinco algarismos.
Determine o número de elementos do conjunto A:

11.1. Que têm exatamente três algarismos.

Vamos começar por fixar um dos 4 na posição das dezenas de milhar, isto é, $\boxed{4}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}$
Assim, sobram ${}^4C_2$ maneiras de escolher duas das 4 posições restantes para colocar os outros dois 4 e existem 9×9 formas de preencher as duas posições restantes.
Logo, nestas condições há ${}^4C_2\times 9^2$ números.
Se nenhum dos algarismos 4 ocupar a posição das dezenas de milhar, então existem ${}^4C_3$ maneiras de escolher três das restantes quatro posições para serem ocupadas por esses algarismos.
A posição das dezenas de milhar pode ser ocupada pelos restantes alagarismos, menos o 0, isto é, existem 8 possibilidades, a posição que sobra pode ser ocupada por qualquer algarismo desde que seja diferente de 4, logo, existem ${}^4C_3\times 8\times 9$ números nestas condições.
Portanto, o número de elementos do conjunto A é igual a ${}^4C_2\times 9^2+{}^4C_3\times 8\times 9=774$

11.2. Cujo produto dos respetivos algarismos é par.

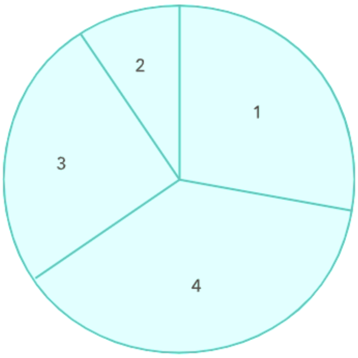
Para que o produto dos algarismos seja par é necessário que pelo menos um dos cinco algarismos seja par, por exemplo, $3\times\boxed{2}\times 5\times 1\times 7=210$. Vamos descobrir um número cujos cinco algarismos não sejam todos ímpares.
Assim, existem 9×10^4, números de cinco algarismos (o primeiro tem que ser diferente de zero), e existem 5^5 números com todos os algarismos ímpares.
Portanto, existem $9\times 10^4-5^5=86\,875$ números de 5 algarismos cujo produto dos respetivos algarismos é par.

12. Uma pequena garrafeira tem espaço para 12 garrafas de vinho. Pretende-se arrumar 10 garrafas, das quais quatro são iguais e as restantes seis são todas diferentes.
Determine o número de maneiras diferentes de arrumar as garrafas na garrafeira.

Como existem 4 garrfas iguais temos que há ${}^{12}C_4$ formas de escolher 4 dos 12 espaços existentes.
Como existem 6 garrafas diferentes e 8 espaços, que sobraram depois de escolhidos os espaços para as 4 garrafas iguais, então há ${}^8A_6$ maneiras de colocar ordenadamente as seis garrafas nos 8 espaços.

Portanto, existem ${}^{12}C_4\times {}^8A_6=9\,979\,200$ maneiras de arrumar as garrafas.

13. Na figura está representado um círculo dividido em quatro setores circulares diferentes, numerados de 1 a 4. Estão disponíveis cinco cores para pintar este círculo.



Pretende-se que sejam respeitadas as seguintes condições:

- todos os setores devem ser pintados;
- cada setor é pintado com uma única cor;
- setores com um raio em comum não podem ficar pintados com a mesma cor;
- o círculo deve ficar pintado com duas ou com quatro cores.

De quantas maneiras diferentes pode o círculo ser pintado?

Existem duas possibilidades.

1.ª pintar o círculo com duas cores:

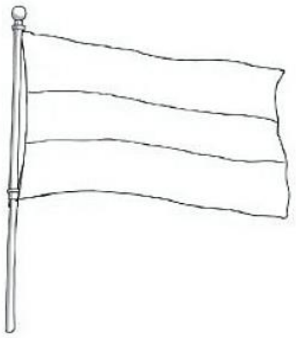
$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Setor 1}\\ 5\\ \text{Uma das}\\ \text{5 cores}\\ \text{disponíveis}\end{array}}\times\boxed{\begin{array}{c}\text{Setor 2}\\ 4\\ \text{Uma das}\\ \text{4 cores}\\ \text{disponíveis}\end{array}}\times\boxed{\begin{array}{c}\text{Setor 3}\\ 1\\ \text{Igual ao setor 1}\end{array}}\times\boxed{\begin{array}{c}\text{Setor 4}\\ 1\\ \text{Igual ao setor 2}\end{array}}=20$$

2.ª pintar o círculo com 4 cores:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Setor 1}\\ 5\\ \text{Uma das}\\ \text{5 cores}\\ \text{disponíveis}\end{array}}\times\boxed{\begin{array}{c}\text{Setor 2}\\ 4\\ \text{Uma das}\\ \text{4 cores}\\ \text{disponíveis}\end{array}}\times\boxed{\begin{array}{c}\text{Setor 2}\\ 3\\ \text{Uma das}\\ \text{3 cores}\\ \text{disponíveis}\end{array}}\times\boxed{\begin{array}{c}\text{Setor 4}\\ 2\\ \text{Uma das}\\ \text{2 cores}\\ \text{disponíveis}\end{array}}=120$$

Assim, existem $20+120=140$ maneiras diferentes de pintar o círculo.

14. Pretende-se fazer uma bandeira com três faixas horizontais, como a que se apresenta na figura.



Estão disponíveis dez cores diferentes para pintar a bandeira, incluindo a cor encarnada.

Pretende-se que sejam respeitadas as seguintes condições :

- todas as faixas devem ser pintadas;
- cada faixa é pintada com uma única cor;
- duas faixas adjacentes não podem ser da mesma cor;
- só pode haver repetição de cor se houver pelo menos uma faixa encarnada.

Quantas bandeiras diferentes se podem fazer?

Sem a cor encarnada: $9\times8\times7$

Com a faixa central encarnada e as faixas dos extremos diferentes: $9\times1\times8$

Com a faixa central encarnada e as faixas dos extremos iguais: $9\times1\times1$

Com uma das faixas dos extremos encarnadas: $2\times1\times9\times8$

Com as duas faixas dos extremos encarnadas: $1\times9\times1$

Portanto, podem ser feitas $9\times8\times7+9\times1\times8+9\times1\times1+2\times1\times9\times8+1\times9\times1=738$ bandeiras

15. Quantos são os números naturais pares que se podem escrever (na base decimal) com quatro algarismos distintos?

Como o número é par devemos começar pelo último algarismo, que pode ser uma das cinco opções (0 , 2 , 4 , 6 ou 8).

O primeiro algarismo vai depender do último, sabendo que não poder o 0.

Temos duas hipóteses:

1.ª hipótese: o último algarismo é o 0, assim temos 9 possibilidades para o primeiro algarismo, todos menos o 0.

$$\boxed{\begin{array}{c}1.^{\text{o}}\text{ algarismo}\\ \\ 9\end{array}}\times\boxed{\begin{array}{c}2.^{\text{o}}\text{ algarismo}\\ \\ 8\end{array}}\times\boxed{\begin{array}{c}3.^{\text{o}}\text{ algarismo}\\ \\ 7\end{array}}\times\boxed{\begin{array}{c}4.^{\text{o}}\text{ algarismo}\\ (\text{zero})\\ 1\end{array}}=504$$

2.ª hipótese: o último algarismo é diferente de 0. Neste caso temos 4 possibilidades (2 , 4 , 6 ou 8).

Para o primeiro algarismo temos 8 possibilidades, porque o 0 não pode ser o primeiro algarismo e porque não pode ser o par do último algarismo.

$$\boxed{\begin{array}{c}1.^{\text{o}}\text{ algarismo}\\ \\ 8\end{array}}\times\boxed{\begin{array}{c}2.^{\text{o}}\text{ algarismo}\\ \\ 8\end{array}}\times\boxed{\begin{array}{c}3.^{\text{o}}\text{ algarismo}\\ \\ 7\end{array}}\times\boxed{\begin{array}{c}4.^{\text{o}}\text{ algarismo}\\ (2,4,6\text{ ou }8)\\ 4\end{array}}=1792$$

Assim, existem $504+1792=2296$ números nas condições pretendidas.

16. Quantos números naturais de 4 algarismos distintos são maiores do que 2400 e não têm os algarismos 3, 5 nem 6?

$2401 \le n \le 2499: \quad 1 \times 1 \times \underset{\substack{\text{pode ser} \\ 0,\,1,\,7,\,8 \\ \text{ou} \\ 9}}{5} \times \underset{\substack{\text{menos} \\ 1 \\ \text{que o} \\ \text{anterior}}}{4}$

$2500 \le n \le 2999: \quad 1 \times \underset{\substack{\text{só pode ser} \\ 7,\,8 \text{ ou } 9}}{3} \times \underset{\substack{\text{pode ser} \\ 0,\,1,\,4 \text{ e menos} \\ \text{um do} \\ 7,8 \text{ ou } 9}}{5} \times \underset{\substack{\text{menos 1} \\ \text{que o} \\ \text{anterior}}}{4}$

$3000 \le n \le 9999: \quad \underset{\substack{\text{só pode ser} \\ 4,\,7,\,8 \text{ ou } 9}}{4} \times \underbrace{6}_{\substack{\text{podem ser} \\ \text{todos menos} \\ 3,\,5 \text{ ou } 6 \\ \text{e menos} \\ \text{um do} \\ 4,7,8 \text{ ou } 9}} \times \underbrace{5}_{\substack{\text{menos 1} \\ \text{que o} \\ \text{anterior}}} \times \underbrace{4}_{\substack{\text{menos 1} \\ \text{que o} \\ \text{anterior}}}$

$1 \times 1 \times 5 \times 4 + 1 \times 3 \times 5 \times 4 + 4 \times 6 \times 5 \times 4 = 560$

17. Considere todos os números naturais de quatro algarismos.

Quantos desses números:

17.1. têm algarismos todos diferentes ou todos iguais?

Algarismos iguais:

Existem 9 números com os quatro algarismos iguais (1111, 2222, ... , 9999)

Algarismos todos diferentes:

$$\boxed{\begin{array}{c} 9 \\ \\ \text{Diferente} \\ \text{de } 0 \end{array}} \times \boxed{\begin{array}{c} 9 \\ \text{Diferente} \\ \text{do anterior} \\ \text{mas já} \\ \text{pode ser } 0 \end{array}} \times \boxed{\begin{array}{c} 8 \\ \\ \text{Diferente} \\ \text{dos} \\ \text{anteriores} \end{array}} \times \boxed{\begin{array}{c} 7 \\ \\ \text{Diferente} \\ \text{dos} \\ \text{anteriores} \end{array}} = 4536$$

Existem $9 + 4536 = 4545$ números de quatro algarismos todos iguais ou todos diferentes.

17.2. têm pelo menos dois algarismos iguais?

Se a todos os números de quatro algarismos retirarmos os que são todos diferentes sobram os que são duas vezes iguais, três vezes iguais ou quatro vezes iguais, isto é, os que são pelo menos duas vezes iguais.

Todos os números de quatro algarismos:

$$\boxed{\begin{array}{c} 9 \\ \\ \text{Diferente} \\ \text{de } 0 \end{array}} \times \boxed{\begin{array}{c} 10 \\ \\ \text{Qualquer} \\ \text{algarismo} \end{array}} \times \boxed{\begin{array}{c} 10 \\ \\ \text{Qualquer} \\ \text{algarismo} \end{array}} \times \boxed{\begin{array}{c} 10 \\ \\ \text{Qualquer} \\ \text{algarismo} \end{array}} = 9000$$

Por **14.1.** já sabemos que existem 4536 números de quatro algarismos todos diferentes.

Logo, existem $9000 - 4536 = 4464$ números nas condições pretendidas.

18. Numa caixa estão seis bolas numeradas de 1 a 6.

De quantas maneiras diferentes se podem colocar, lado a lado, as seis bolas de modo que:

18.1. as bolas com os números 1 e 2 fiquem uma ao lado da outra?

As bolas 1 e 2 pode ser ordenadas de 2 formas diferentes (1 2 ou 2 1).

Existem $6-2+1=5$ maneiras diferentes de colocar o bloco das bolas 1 e 2.

Existem, $4\times3\times2\times1=24$ maneiras de ordenar as restantes bolas.

Portanto, existem $2\times5\times24=240$ maneiras diferentes.

18.2. não fiquem dois algarismos pares seguidos?

Como existem 3 algarismos par para 6 posições, significa que as bolas pares vão estar intercaladas com as ímpares.

Se a primeira bola é par, temos:

$$\boxed{\begin{array}{c}3\\ \text{par}\end{array}}\times\boxed{\begin{array}{c}3\\ \text{ímpar}\end{array}}\times\boxed{\begin{array}{c}2\\ \text{par}\end{array}}\times\boxed{\begin{array}{c}2\\ \text{ímpar}\end{array}}\times\boxed{\begin{array}{c}1\\ \text{par}\end{array}}\times\boxed{\begin{array}{c}1\\ \text{ímpar}\end{array}}=36$$

Se a primeira bola é ímpar, temos o mesmo número de maneiras.

Portanto, existem $2\times36=72$ maneiras diferentes de colocar as bolas sem que dois algarismos pares fiquem seguidos

18.3. os algarismos pares fiquem seguidos e por ordem crescente?

Só existem uma forma de colocar os algarismos par por ordem crescente, que é: 2 4 6

Existe $6-3+1=4$ maneiras de colocar o bloco $\boxed{2\,4\,6}$ das bolas com números pares na sequência.

Os algarismos ímpares podem ser ordenados de $3\times2\times1=6$ maneiras diferentes.

As bolas podem ser colocadas $1\times4\times6=24$ maneiras diferentes.

19. O Tomé vai colorir as faces de um dado cúbico, com as faces numeradas de 1 a 6. Cada face vai ser colorida com uma única cor e o Tomé tem à disposição 8 cores diferentes.

19.1. De quantas formas diferentes é possível colorir o cubo?

Como pode haver repetição, é possível pintar o cubo de $8^6 = 262\,144$ formas diferentes

19.2. De quantas formas é possível colorir o cubo, de modo que as faces com números pares tenham todas a mesma cor e essa cor seja diferente das cores das restantes faces?

Existem três faces com números pares $(2, 4 \text{ e } 6)$ como vão ficar todas pintadas com a mesma cor e existem 8 cores disponíveis, existem 8 formas de pintar as faces pares.
Sobram as três faces ímpares e 7 cores, logo existem, 7^3 formas diferentes de pintar estas faces.

Portanto, existem $8 \times 7^3 = 2\,744$ formas diferentes de pintar o dado de acordo com as indicações.

20. Uma turma tem 28 alunos, dos quais 13 são rapazes e 15 são raparigas. Pretende-se formar uma comissão com três alunos.
Quantas comissões diferentes se podem formar se a comissão tiver alunos de ambos os sexos?
Apresentam-se, em seguida, duas respostas corretas a este problema.

i) $15 \times {}^{13}C_2 + 13 \times {}^{15}C_2$

ii) ${}^{28}C_3 - {}^{13}C_3 - {}^{15}C_3$

Numa pequena composição, explique o raciocínio que conduz a cada uma delas.

Existem duas possibilidades para que a comissão tenha alunos de ambos os sexos: existirem duas raparigas e um rapaz ou dois rapazes e uma rapariga.

i) $15 \times {}^{13}C_2$ representa o número de maneiras distintas de escolher aleatoriamente uma rapariga entre as 15 e escolher dois dos 13 rapazes.

$13 \times {}^{15}C_2$ representa o número de maneiras distintas de escolher aleatoriamente um rapaz entre o 13 e escolher duas das 15 raparigas.

$15 \times {}^{13}C_2 + 13 \times {}^{15}C_2$ é o número total de comissões que se podem formar, tendo em conta as condições existentes.

ii) ${}^{28}C_3$ é o número de maneiras de escolher aleatoriamente três dos 28 alunos.

${}^{13}C_3$ é o número de maneiras de escolher aleatoriamente três dos 13 rapazes.

${}^{15}C_3$ é o número de maneiras de escolher aleatoriamente três das 15 raparigas.

${}^{28}C_3 - {}^{13}C_3 - {}^{15}C_3$, se ao número de maneiras diferentes de escolher três pessoas retirarmos o número de maneiras de escolher três rapazes e o número de maneiras de escolher três raparigas, obtemos o número de maneiras de escolher comissões compostas por pessoas de ambos os sexos.

21. De quantas maneiras podemos tirar 6 cartas de um baralho de 52 cartas, se:

21.1. não foram impostas condições?

Como não há repetição e a ordem não é relevante:

$$^{52}C_6 = 10\,358\,520$$

21.2. forem todas copas?

$$\underset{\substack{\text{Escolha}\\ \text{de cartas}\\ \text{de copas}}}{^{13}C_3} = 1\,716$$

21.3. forem 3 de copas e 3 de paus?

$$\underset{\substack{\text{Escolha}\\ \text{de cartas}\\ \text{de copas}}}{^{13}C_3} \times \underset{\substack{\text{Escolha}\\ \text{de cartas}\\ \text{de paus}}}{^{13}C_3} = 81\,796$$

21.4. forem 3 de um naipe e 3 de outro?

$$\underset{\substack{\text{Escolha}\\ \text{dos dois}\\ \text{naipes}}}{^{4}C_2} \times \underset{\substack{\text{Escolha}\\ \text{de cartas}\\ \text{de um dos}\\ \text{naipes}\\ \text{escolhidos}}}{^{13}C_3} \times \underset{\substack{\text{Escolha}\\ \text{de cartas}\\ \text{do outro}\\ \text{naipe}}}{^{13}C_3} = 490\,776$$

21.5. forem 4 de copas e 2 de paus?

$$\underset{\substack{\text{Escolha}\\ \text{de cartas}\\ \text{de copas}}}{^{13}C_4} \times \underset{\substack{\text{Escolha}\\ \text{de cartas}\\ \text{de paus}}}{^{13}C_2} = 55\,770$$

21.6. forem 4 de um naipe e 2 de outro?

$$\underset{\substack{\text{Maneiras}\\ \text{de escolher}\\ \text{os dois naipes.}\\ \text{A ordem}\\ \text{é relevante}}}{^{4}A_2} \times \underset{\substack{\text{Escolha}\\ \text{de 4 cartas}\\ \text{de um dos}\\ \text{naipes}}}{^{13}C_4} \times \underset{\substack{\text{Escolha}\\ \text{de 2 cartas}\\ \text{do outro}\\ \text{naipe.}}}{^{13}C_2} = 669\,240$$

21.7. forem 2 de um valor, um de outro e 3 de outro?

$$\underset{\substack{\text{Maneiras}\\ \text{de escolher}\\ \text{3 valores de}\\ \text{um naipe}\\ \text{qualquer.}\\ \text{A ordem}\\ \text{é relevante}}}{^{13}A_3} \times \underset{\substack{\text{Escolha}\\ \text{de 2 cartas}\\ \text{de 4 com o}\\ \text{mesmo}\\ \text{valor}}}{^{4}C_2} \times \underset{\substack{\text{Escolha}\\ \text{de 1 carta}\\ \text{de 4 com o}\\ \text{mesmo}\\ \text{valor}}}{^{4}C_2} \times \underset{\substack{\text{Escolha}\\ \text{de 3 cartas}\\ \text{de 4 com o}\\ \text{mesmo}\\ \text{valor}}}{^{4}C_3} = 164\,736$$

21.8. forem 3 de um valor e 3 de outro?

$$\underset{\substack{\text{Maneiras}\\ \text{de escolher}\\ \text{2 valores de}\\ \text{um naipe}\\ \text{qualquer.}\\ \text{A ordem}\\ \text{é relevante}}}{^{13}A_3} \times \underset{\substack{\text{Escolha}\\ \text{de 3 cartas}\\ \text{de 4 com o}\\ \text{mesmo}\\ \text{valor}}}{^{4}C_3} \times \underset{\substack{\text{Escolha}\\ \text{de 3 carta}\\ \text{de 4 com o}\\ \text{mesmo}\\ \text{valor}}}{^{4}C_3} = 1\,248$$

22. Com um conjunto de 10 livros todos diferentes, sendo 5 de Física, 3 de Matemática e 2 de informática, de quanta maneiras podemos arrumá-los numa prateleira se:

22.1. Não forem impostas condições?

Como a ordem interessa:

${}^{10}A_{10} = 10! = 3\,628\,800$

22.2. Tiverem de ficar juntos por temas?

Temos 3 conjuntos de livros que podem permutar, isto é $3! = 6$

Como em cada conjunto os livros podem trocar a ordem porque são diferentes, temos para os livros de Física $5! = 120$, para os de Matemática $3! = 6$ e para os de Informática 2.

Portanto, existem $6 \times 120 \times 6 \times 2 = 8\,640$ maneiras diferentes de os arrumar.

22.3. Só os de Matemática tiverem de ficar juntos?

Os livros de Matemática, juntos, podem ocupar $10 - 3 + 1 = 8$ lugares e como podem permutar entre si, temos $8 \times 3!$ maneiras diferentes.

Para os restantes 7 livros existem 7!, maneiras distintas.

Portanto existem $8 \times 3! \times 7! = 241\,920$ maneiras diferentes de arrumar os livros na estante

23. Numa geladaria podem confecionar-se 78 taças diferentes, com dois sabores distintos em cada taça. Quantos sabores distintos em existem nessa geladaria?

Seja n o número total de sabores.

Como cada taça tem 2 sabores distintos, temos ${}^{n}C_2$ formas diferentes de escolher os sabores.

Assim, ${}^{n}C_2 = 78 \Leftrightarrow \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = 78 \Leftrightarrow \dfrac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2 \times \cancel{(n-2)!}} = 78 \Leftrightarrow \dfrac{n^2 - n}{2} = 78 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n^2 - n = 156 \Leftrightarrow n^2 - n - 156 = 0 \Leftrightarrow n = -12 \vee n = 13$$

Como $n \in IN$, então $n = 13$

Logo, existem 13 sabores na geladaria

24. Um teste tem duas partes: a primeira parte do teste tem cinco questões de escolha múltipla, cada uma com quatro opções de resposta, das quais apenas uma deve ser selecionada; a segunda parte do teste tem 10 questões cuja resposta é "Verdadeiro" ou "Falso".

De quantas maneiras se pode responder às questões desse teste se se responder a todas as questões?

Para cada uma das cinco questões de escolha múltipla existem 4 possibilidades, logo existem 4^5 maneiras de responder às questões.

Para cada uma das restantes 10 questões, há duas hipóteses de resposta, isto é, existem 2^{10} maneiras de responder.

Assim, existem $4^5 \times 2^{10} = 1\,048\,576$ maneiras de responder a todas as questões do teste.

25. Considere todos os números que se podem escrever utilizando os algarismos 1 1 2 2 2 3 3 4 .

Quantos desses algarismos são pares?

Para que o número seja par, o algarismo das unidades tem de ser 2 ou 4.

$$\square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \boxed{2}$$

Fixando um dos algarismos 2 nas unidades, temos:

$$\underset{\substack{\text{Maneiras de}\\\text{preencher}\\\text{as restantes}\\\text{7 posições}\\\text{com o 1}}}{{}^{7}C_2} \times \underset{\substack{\text{Maneiras de}\\\text{preencher}\\\text{as restantes}\\\text{5 posições}\\\text{com os}\\\text{algarismos}\\\text{2 que sobraram}}}{{}^{5}C_2} \times \underset{\substack{\text{Maneiras de}\\\text{preencher}\\\text{as restantes}\\\text{3 posições}\\\text{com o 3}}}{{}^{3}C_2}$$

e o algarismo 4 fica na posição restante.

ou

$$\square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \boxed{4}$$

Fixando o algarismo 4 nas unidades, temos:

$$\underset{\substack{\text{Maneiras de}\\\text{preencher}\\\text{as restantes}\\\text{7 posições}\\\text{com o 1}}}{{}^{7}C_2} \times \underset{\substack{\text{Maneiras de}\\\text{preencher}\\\text{as restantes}\\\text{5 posições}\\\text{com o 2}}}{{}^{5}C_3}$$

e os algarismos 3 só podem ficar nas posíções que sobraram.

Portanto podemos ter, ${}^{7}C_2 \times {}^{5}C_2 \times {}^{3}C_2 + {}^{7}C_2 \times {}^{5}C_3 = 840$ números pares.

26. Um código multibanco é constituído por uma sequência de 4 algarismos. Por exemplo 1234. O código deve ser inserido usando um teclado como o da figura.

Um ladrão observando de longe, conseguiu perceber as seguintes características do código multibanco de um cliente:

- os algarismos são todos diferentes;
- o primeiro e o último algarismos situam-se na mesma linha horizontal;
- o segundo e o terceiro algarismos encontram-se na linha horizontal acima da anterior.

Quantos códigos de multibanco existem nas condições indicadas?

Como o segundo e terceiro algarismos estão numa linha acima da linha do primeiro e o último algarismos, então estes estão na linha $4-5-6$ ou $7-8-9$.

Para cada uma das possibilidades o número de maneiras de obter o código pedido é:

$$\underset{\substack{\text{Escolha}\\\text{de 2}\\\text{números}\\\text{de 3}\\\text{(1.º e 4.º)}}}{{}^{3}C_2} \times \underset{\substack{\text{Podem}\\\text{torcar}\\\text{a}\\\text{posição}}}{2} \times \underset{\substack{\text{Escolha}\\\text{de 2}\\\text{números}\\\text{de 3}\\\text{(2.º e 3.º)}}}{{}^{3}C_2} \times \underset{\substack{\text{Podem}\\\text{torcar}\\\text{a}\\\text{posição}}}{2} = 3\times2\times3\times2 = 36$$

Para a outra possibilidade as condições são iguais, logo existem $2\times36=72$ códigos nas condições indicadas.

27. Considere o seguinte problema.

Para fazer a decoração de uma festa há quatro bandeiras amarelas iguais, quatro bandeiras vermelhas iguais e quatro bandeiras brancas também iguais entre si. Dez dessas bandeiras vão ser colocadas em fila. Atendendo à cor, quantas sequências diferentes é possível formar?

Uma resposta correta a este problema é:

$$^3C_2 \times {}^{10}C_4 \times {}^6C_4 + {}^3C_2 \times {}^{10}C_3 \times {}^7C_3$$

Numa pequena composição, explique o raciocínio que conduz a esta resposta.

No que respeita à cor, há duas formas diferentes de escolher 10 das 12 bandeiras para colocar numa fila.

$^3C_2 \times {}^{10}C_4 \times {}^6C_4$ representa a possibilidade de escolher-se 4 bandeiras de uma cor, 4 bandeiras de outra cor e 2 bandeira da cor restante.

$^3C_2$ é o número de maneiras de escolher duas das três cores que vão ter quatro bandeiras.

$^{10}C_4$ é o número de maneiras de escolher quatro das dez posições disponíveis na fila.

$^6C_4$ é o número de maneiras de escolher quatro das seis posições que sobraram depois de colocadas as bandeiras anteriores.

Os lugares que sobram (2), ficam para as bandeiras da terceira cor.

$^3C_2 \times {}^{10}C_3 \times {}^7C_3$ representa a possibilidade de escolher-se 3 bandeiras de uma cor, 3 bandeiras de outra cor e 4 da cor restante.

$^3C_2$ é o número de maneiras de escolher duas das três cores que vão ter 3 bandeiras.

$^{10}C_3$ é o número de maneiras de escolher três das dez posições disponíveis na fila.

$^7C_3$ é o número de maneiras de escolher três das sete posições que sobraram depois de colocadas as bandeiras anteriores.

As bandeiras com a terceira cor ficam colocadas nas posições que sobraram (4).

Portanto $^3C_2 \times {}^{10}C_4 \times {}^6C_4 + {}^3C_2 \times {}^{10}C_3 \times {}^7C_3$ é a soma das duas possibilidades.

28. Numa turma há 25 alunos.

De quantas maneiras se podem sentar nas cinco filas de uma sala de aula, de seis lugares cada uma, de forma que o Bernardo e o Frederico não fiquem juntos lado a lado? (**Apresente apenas a expressão**)

Temos 30 lugares disponíveis $6 \times 5 = 30$

O número de maneiras de ordenar os 25 alunos nos 30 lugares disponíveis é $^{30}A_{15}$

O Frederico e o Bernardo podem fcar junto por qualquer ordem de 2! = 2, maneiras.

Para cada uma delas há cinco filas disponíveis onde podem ficar juntos, e em cada fila podem ocupar $6 - 2 + 1 = 5$, posições. Os restantes 23 alunos podem ser colocados nos restantes 28 lugares disponíveis, isto é, $^{28}A_{23}$, maneiras
diferentes.

Assim, o número de maneiras de o Frederico e o Bernardo ficarem juntos é $2! \times 5 \times 5 \times {}^{28}A_{23}$.

Portanto, $^{30}A_{28} - 2! \times 5 \times 5 \times {}^{28}A_{23}$, é o número de maneiras de o Frederico e o Bernardo nao ficarem juntos

29. A Carla, o Filipe e o Lourenço são alunos do 10.º ano. A Raquel, a Isabel e o Nuno são alunos do 11.º ano. O Simão, a Sandra e a Vitória são alunos do 12.º ano.

29.1. Determine de quantas maneiras se podem colocar em fila estes alunos, de modo que os alunos do mesmo ano fiquem juntos.

O número de maneiras de ordenar os alunos do 10.º ano é 3! = 6.

O número de maneiras de ordenar os alunos do 11.º ano é 3! = 6.

O número de maneiras de ordenar os alunos do 12.º ano é 3! = 6.

Considerando cada ano como um grupo, existem 3! = 6, formas de ordenas os três grupos.

Logo, existem $3!\times3!\times3!\times3!=1\,296$ maneiras de colocar os alunos nas condições do enunciado.

29.2. Pretende-se tirar uma fotografia com cinco elementos deste grupo. Determine o número de maneiras de escolher e dispor os cinco elementos na fotografia, sabendo que a Vitória apenas estará na fotografia caso a Raquel também esteja.

Existem três hipóteses para escolher ordenadamente os cinco alunos, nas condições do enunciado.

1.ª hipótese: a Raquel e a Vitória estão ambas na fotografia.

2.ª hipótese: a Raquel está e a Vitória não está.

3.ª hipótese: nenhuma delas está na fotografia.

1.ª hipótese:

Como a Raquel e a Vitória fazem parte do grupo, sobram 3 vagas e 7 alunos para escolher, isto é, existem ${}^7C_3$ formas de os escolher.

Como o número de maneiras de ordenar os 5 elementos é 5!, então existem ${}^7C_3\times5!$ maneiras de tirar fotografias na 1.ª hipótese.

2.ª hipótese:

Se a Raquel está na fotografia e a Vitória não, existem ${}^7C_4$, maneiras de escolher os restantes 4 elementos.

Como o número de maneiras de ordenar os 5 elementos é 5!, então existem ${}^7C_4\times5!$ maneiras de tirar fotografias na 2.ª hipótese.

3.ª hipótese:

Se nenhuma das duas está na fotografia, existem ${}^7A_5$ maneiras de escolher e ordenar os cinco dos restantes sete alunos.

Portanto, uma resolução do problema é, ${}^7C_3\times5!+{}^7C_3\times5!+{}^7A_5=10\,920$

30. Considere as letras da palavra MATEMATICA.

Determine o número de maneiras de escrever palavras com cinco dessas letras de modo que:

A palavra MATEMATICA tem 2M, 3A, 2T, 1E, 1I e 1C

30.1. as letras sejam todas diferentes;

${}^{6}A_{5}=720$ é o número de maneiras de escolher e ordenar cinco das seis letras que estão na palavra MATEMATICA.

30.2. sejam usados os três A e as restantes letras sejam todas diferentes;

${}^{5}C_{3}$ é o número de maneiras de escolher três das cinco posições que vão ficar ocupadas pelos três A.

${}^{5}C_{2}$ é o número de maneiras de escolher duas das cinco letras diferentes que sobraram.

$2!$ é o número de maneiras de ordenar as letras diferentes.

Assim, ${}^{5}C_{3}\times{}^{5}C_{2}\times 2!=200$ é o número de maneiras de escolher três A e as restantes todas diferentes.

30.3. duas das letras usadas sejam iguais e as restantes sejam diferentes;

Das 6 letras que compõem a palavra MATEMATICA, existem três letra que têm pelo menos duas iguais, M, A e T, isto é, há três maneiras de escolher as letras iguais.

${}^{5}C_{2}$ é o número de maneiras de escolher duas das cinco posições que vão ser ocupadas pelas duas letras iguais.

${}^{5}C_{3}$ é o número de maneiras de escolher três das cinco letras diferentes restantes.

$3!$ é o número de maneiras de ordenar as três letras diferentes.

Portanto $3\times{}^{5}C_{2}\times{}^{5}C_{3}\times 3!=1800$ é o número de maneiras de cumprir as condições do enunciado.

30.4. dois pares de letras sejam iguais;

As letras iguais são M, A e T, logo, há ${}^{3}C_{2}$ maneiras de escolher dois pares de letras iguais.

${}^{4}C_{1}$ é o número de maneiras de escolher uma das quatro letras restantes.

${}^{5}C_{2}$ é o número de maneiras de escolher duas das cinco posições a serem ocupadas por um dos pares de letras iguais.

${}^{3}C_{2}$ é o número de maneiras de escolher duas das três posições que sobraram e que vão ser ocupadas pelo outro par de letras iguais.

Portanto, ${}^{3}C_{2}\times{}^{4}C_{1}\times{}^{5}C_{2}\times{}^{3}C_{2}=360$, é uma resolução possível para o problema.

30.5. pelo menos uma das letras usadas sejam um A e as restantes sejam diferentes;

Existem três hipóteses para escrever.

1.ª hipótese: com um A

${}^5C_4$ é o número de maneiras de escolher as restantes quatro letras das cinco que ficam disponíveis.

5! é o número de maneiras de ordenar as cinco letras escolhidas.

2.ª hipótese: com dois A

${}^5C_2$ representa o número de maneiras de escolher duas das cinco posições disponíveis.

${}^5C_3$ representa o número de maneiras de escolher três das restantes cinco letras .

$3!$ representa o número de maneiras de ordenar as três letras diferentes.

3.ª hipótese: com três A

${}^5C_3$ é o número de maneiras de escolher três das cinco posições disponíveis.

${}^5C_2$ é o número de maneiras de escolher duas das cinco letras restantes.

$2!$ é o número de maneiras de ordenar as duas letras diferentes.

Portanto, ${}^5C_4 \times 5! + {}^5C_3 \times {}^5C_2 \times 3! + {}^5C_2 \times {}^5C_3 \times 2! = 1400$ é o número de maneiras de cumprir as condições do enunciado.

30.6. sejam utilizados os dois M ou os dois T, mas não em simultâneo.

Há três hipóteses diferentes de escrever as palavras nas condições do enunciado de: com dois **M** (ou dois **T**) e três **A**, com dois **M** (ou dois **T**) e dois **A** ou com dois **M** (ou dois **T**) e três letras diferentes.

O número de maneiras de escrever palavras com dois **M** (ou dois **T**) e três **A** é ${}^5C_2$, onde ${}^5C_2$ corresponde ao número de maneiras de escolher aleatoriamente duas das cinco posições a serem ocupadas pelos dois **M** (ou dois **T**), havendo apenas uma maneira de colocar os três **A** nas posições restantes.

O número de maneiras de escrever as palavras com dois **M** (ou dois **T**) e dois **A** é ${}^5C_2 \times {}^3C_2 \times 4$, onde ${}^5C_2$ corresponde ao número de maneiras de escolher aleatoriamente duas das cinco posições a serem ocupadas pelos dois **M** (ou dois **T**), ${}^3C_2$ é o número de maneiras de escolher aleatoriamente duas das três posições restantes a serem ocupadas pelos **A** e quatro é o número de maneiras de escolher a letra a ser colocada na posição que falta.

O número de maneiras de escrever palavras com dois **M** (ou dois **T**) e três letras diferentes é ${}^5C_2 \times {}^5C_3 \times 3!$, onde ${}^5C_2$ corresponde ao número de maneiras de escolher aleatoriamente duas das cinco posições a serem ocupadas pelos dois **M** (ou dois **T**), ${}^5C_3$ é o número de maneiras de escolher três das cinco letras restantes e 3! é o número de maneiras de ordenar as três letras diferentes.

Assim, uma resolução possível para o problema descrito é $2 \times \left({}^5C_2 + {}^5C_2 \times {}^3C_2 \times 4 + {}^5C_3 \times {}^5C_2 \times 3! \right) = 1\,460$

31. Pretende-se arrumar numa prateleira um conjunto de nove DVD, do qual faz parte a trilogia *O Senhor dos Anéis*.

31.1. Determine o número de maneiras diferentes de arrumar os DVD, de forma que os três filmes da trilogia fiquem juntos e ordenados por ano crescente de edição, da esquerda para a direita.

Só há uma maneira de colocar os DVD ordenados por ordem crescente.

O número de maneiras de ordenar este conjunto de DVD e os restantes seis é $7! = 5040$

31.2. Determine o número de maneiras de, arrumando os filmes ao acaso, os filmes de *O Senhor dos Anéis* fiquem separados.

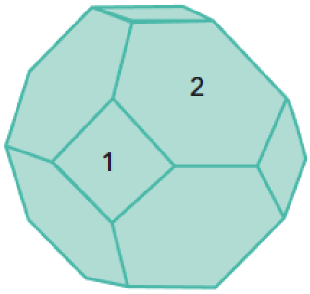
6! é o número de maneiras de arrumar os seis DVD que não fazem parte da trilogia.

${}^7C_3$ é a maneira de escolher três dos sete espaços criados entre os seis DVD já arrumados, onde poderão ser colocados os DVD da trilogia.

3! é o número de maneiras de ordenar os três DVD da trilogia nos três espaços escolhidos.

Portanto uma resolução é $6! \times {}^7C_3 \times 3! = 151\,200$

32. Observe a figura, onde está representado um sólido constituído por 12 faces, das quais quatro faces são quadrados e oito faces são hexágonos. Duas das faces já estão numeradas com os números 1 e 2.



Pretende-se numerar as restantes faces, com os números de 3 a 12 (um número diferente em cada face).

Escreva uma expressão que dê o número de maneiras diferentes de o fazer, de modo que nas faces que são quadrados sejam colocados, no máximo, dois números ímpares.

Há duas alternativas que cumprem as condições do enunciado: preencher as restantes três faces quadradas com três números pares ou preencher as restantes três faces com dois números pares e um ímpar.

1.ª possibilidade:

O número de maneiras de escolher e ordenar três dos cinco números pares disponíveis é ${}^5A_3$, que é o número de maneiras de preencher as três fazes quadradas livres. Para cada uma delas há 8! maneiras de preencher as restantes oito faces com os oito números disponíveis. Assim, esta possibilidade pode ser realizada de ${}^5A_3 \times 8!$ maneiras.

2.ª possibilidade:

3, é o número de maneiras de preencher com um algarismo ímpar uma das três faces quadradas.

5 é o número de algarismos disponíveis.

${}^5A_2$ é o número de maneiras de escolher e ordenar dois dos cinco número pares disponíveis nas duas restantes faces quadradas.

$8!$ é o número de maneiras de preencher as restantes oito faces com os oito números disponíveis.

Portanto, uma resolução para o problema é ${}^5A_3 \times 8! + 3 \times 5 \times {}^5C_2 \times 8!$

33. Uma editora pediu a um jovem autor para incluir, numa compilação de vários autores alguns dos seus contos para crianças. O autor tem n contos inéditos e outros três que já foram publicados anteriormente numa revista. A editora decidiu selecionar dois contos deste autor, inéditos ou não, para incluir na compilação. Concluiu-se que a editora pode selecionar dois dos contos deste autor de 21 maneiras diferentes.
Determine o número de contos inéditos que estão disponíveis.

$$^{n+3}C_2=21 \Leftrightarrow \frac{(n+3)!}{2!\times(n+3-2)!}=21 \Leftrightarrow \frac{(n+3)(n+2)\cancel{(n+1)!}}{2\cancel{(n+1)!}}=21 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2+5n-6=42 \Leftrightarrow n=\frac{-5\pm\sqrt{25+144}}{2} \Leftrightarrow n=-9 \ \vee\ n=4$$

Como $n\in IN$, então $n=4$

34. Um saco contém 30 bolas, indistinguíveis ao tato, das quais n bolas são azuis e as restantes são brancas. Cada bola tem uma única cor e há mais bolas azuis do que bolas brancas.
Sabe-se que o número de maneiras de escolher duas bolas desse saco, de modo que ambas sejam da mesma cor é 219.
Determine o valor de n .
Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- resolver a equação apresentada, sem utilizar a calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos.

$$^{n}C_2+{}^{30-n}C_2=219 \Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!}+\frac{(30-n)!}{2!(30-n-2)!}=219 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2\cancel{(n-2)!}}+\frac{(-n+30)(-n+29)\cancel{(-n+28)!}}{2\cancel{(-n+28)!}}=219$$

$$\Leftrightarrow n^2-n+n^2-29n-30n+870=438$$

$$\Leftrightarrow 2n^2-60n+432=0$$

$$\Leftrightarrow n^2-30n+216=0$$

$$\Leftrightarrow n=\frac{30\pm\sqrt{9000-864}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n=12 \ \vee\ n=18$$

Uma vez que n é o número de bolas azuis e como há mais bolas azuis do que brancas, então $n=18$

35. Considere um tabuleiro dividido em 28 casa, como o representado na figura 1. Pretendem dispor-se 20 fichas sobre o tabuleiro: sete azuis, indistinguíveis, seis encarnadas, indistinguíveis, e outras sete, distintas umas das outras, marcadas com uma letra de **A** a **G** (cada peça ocupa uma única casa). Na figura 2 está um exemplo de uma possível disposição.

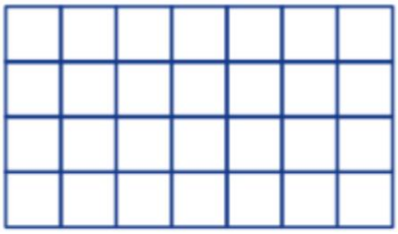


Figura 1

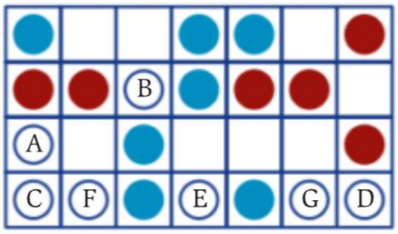


Figura 2

De quantas maneiras se podem colocar as fichas sobre o tabuleiro?

Uma das respostas possíveis a este problema é ${}^{28}C_7 \times {}^{21}C_6 \times {}^{15}A_7$. Outra resposta possível é ${}^{28}C_{20} \times {}^{20}A_7 \times {}^{13}C_7$.

Num breve texto, explique cada uma das respostas.

${}^{28}C_7 \times {}^{21}C_6 \times {}^{15}A_7$:

${}^{28}C_7$ é o número de maneiras de escolher 7 dos 28 lugares para colocar as 7 fichas azuis;

${}^{21}C_6$ é o número de formas de escolher os lugares para as 6 fichas encarnadas.

${}^{15}A_7$ é o número de maneiras de escolher e ordenar as 7 fichas com letras pelos 15 lugares disponíveis.

Assim, ${}^{28}C_7 \times {}^{21}C_6 \times {}^{15}A_7$ é uma resposta possível ao problema em causa.

${}^{28}C_{20} \times {}^{20}A_7 \times {}^{13}C_7$:

${}^{28}C_{20}$ é o número de maneiras de escolher 20 dos 28 lugares para colocar as 20 fichas;

${}^{20}A_7$ é o número de formas de escolher e ordenar as 7 fichas com letras pelos 20 lugares;

${}^{13}C_7$ é o número de maneiras de escolher, dos 13 lugares ainda por ocupar, 7 para as fichas azuis.

As fichas encarnadas são colocadas nos restantes lugares

Assim, ${}^{28}C_{20} \times {}^{20}A_7 \times {}^{13}C_7$ é outra resposta possível ao problema em causa.

36. Um baralho de cartas completo é constituído por 52 cartas, repartidas por quatro naipes de treze cartas cada: espadas, copas, paus e ouros. Cada naipe tem três figuras: rei, dama e valete.

36.1. Pretendem colocar-se sete cartas numa só fila, de modo que as três primeiras sejam figuras, a última seja um ás e que as restantes três sejam cartas encarnadas que não sejam figuras nem ases.

Quantas filas diferentes se podem formar?

$$\underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_}_{\substack{\text{Escolher e ordenar}\\ \text{12 figuras para as 3}\\ \text{primeiras posições}\\ {}^{12}A_3}}\ \underbrace{\_\_\ \_\_\ \_\_}_{\substack{\text{Escolher e ordenar}\\ \text{18 cartas}\\ \text{encarnadas}\\ \text{(26 cartas}\\ \text{encarnadas menos}\\ \text{6 figuras e 2 ases)}\\ \text{para as 3 posições}\\ \text{do meio}\\ {}^{18}A_3}}\ \ \underline{\ 4\ }$$

${}^{12}A_3 \times {}^{18}A_3 \times 4 = 25\,850\,880$

36.2. De quantas maneiras distintas se podem extrair seis cartas do baralho, de modo que exatamente duas sejam espadas e que, entre as restantes quatro, existam no máximo três ouros?

Existirem pelo menos três ouros é o acontecimento contrário a existirem exatamente quatro ouros.

${}^{13}C_2$ é o número de maneiras distintas de escolher duas cartas de espadas

${}^{39}C_4$ é o número de maneiras diferentes de escolher quatro cartas que não são espadas

${}^{13}C_4$ é o número de maneiras diferentes de escolher 4 cartas de ouros.

Portanto, ${}^{13}C_2 \times {}^{39}C_2 - {}^{13}C_2 \times {}^{13}C_4 = 6\,359\,808$, maneiras distintas de extrair as cartas nas condições pedidas

37. Um saco contém 16 bolas indistinguíveis ao tato.

Três bolas estão numeradas com o número 1, cinco bolas com o número 2 , seis bolas com o número 3 e duas bolas com o número 4.

De quantas maneiras distintas se podem colocar 16 bolas numa só fila, de modo que as bolas numeradas com o número 2 fiquem juntas?

$\boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{2}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}$, consideremos que as bolas com o número 2 são um bloco, assim, existem $16-5+1=12$ possibilidades para as colocar.

${}^{11}C_3$ é o número de maneiras diferente de colocar as três bolas com o número 1 nas 11 posições que sobram.

${}^{8}C_6$ é o número de maneiras diferente de colocar as seis bolas com o número 3 nas 8 posições que sobram.

As duas bolas com o número 4, são colocadas nas restantes posições.

Portanto, $12 \times {}^{11}C_3 \times {}^{8}C_6 = 54\,440$ é o número de maneiras distintas de colocar as bolas nas condições do enunciado.

38. Quantos números de 16 algarismos se podem formar com os algarismos do número 1 233 325 671 211 229?

Existem quatro algarismos 1, cinco algarismos 2, três algarismos 3, um algarismo 5, um algarismo 6, um algarismo 7 e um algarismo 9.

${}^{16}C_4$ é o número de maneiras distintas de colocar os algarimos com o número 1 nas 16 posições.

${}^{12}C_5$ é o número de maneiras diferentes de colocar os algarismos com o número 2 nas 12 posições restantes

${}^{7}C_3$ é o número de maneiras diferentes de escolher três das sete posições restantes, para colocar os algarismos com o número 3.

4! é o número de maneiras diferentes de escolher e ordenar os restantes algarismos (5, 6, 7 e 9) nas quatro posições que sobraram.

Portanto, ${}^{16}C_4 \times {}^{12}C_5 \times {}^{7}C_3 \times 4! = 1\,210\,809\,600$ é o número de maneiras distintas de formar um número nas condições pedidas.

39. Considere todos os algarismos que se podem escrever com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

39.1. Em quantos desses números o algarismo 2 aparece exatamente duas vezes?

${}^{5}C_2$ é o número de maneiras diferentes para colocar os dois algarismos 2.

8^3 existem 8 possibilidades para cada uma das restantes três.

Portanto, ${}^{5}C_2 \times 8^3 = 5\,120$ é uma resolução para o problema pedido.

39.2. Em alguns desses números os dois últimos algarismos são pares e a soma dos seus algarismos é um número par. Quantos são estes números?

Justifique que uma resposta a este problema é $4^5 + {}^{3}C_2 \times 5^2 \times 4^3$.

Para que a soma dos 5 algarismos seja par temos de considerar duas hipóteses, todos os algarismos são pares ou existem três algarismos pares.

1.ª possibilidade, todos os algarismos são pares:

4^5, para cada posição temos 4 hipóteses.

2.ª possibilidade, existem três algarismos pares:

A duas últimas posições são ocupadas por algarismos pares.

${}^{3}C_2$, representa a escolha das duas posições que vão ser ocupadas pelos algarismos ímpares.

5^2 é o número de maneiras de escolher os dois algarismos ímpares.

4^3 é o número de distribuir os pares escolhidos.

Assim, existem $4^5 + {}^{3}C_2 \times 5^2 \times 4^3$ números nestas condições.

40. Considere que um grupo de dez pessoas foram contratadas para uma mesma função.

De quantas maneiras se podem dividir as dez pessoas em:

40.1. dois grupos de cinco pessoas?

Temos 10 pessoas.

Tamanho dos grupos: 5 e 5

Grupos com o mesmo tamanho: 2

$$\frac{10!}{5!\times 5!\times 2!}=126$$

40.2. três grupos, dois de quatro pessoas e um de duas?

Temos 10 pessoas.

Tamanho dos grupos: 4, 4 e 2

Grupos com o mesmo tamanho: 2

$$\frac{10!}{4!\times 4!\times 2!\times 2!}=1\,575$$

40.3. quatro grupos, um de uma pessoa, um de duas, um de três e um de quatro?

Temos 10 pessoas.

Tamanhos dos grupos: 1, 2, 3 e 4

Grupos com o mesmo tamanho: 0

$$\frac{10!}{1!\times 2!\times 3!\times 4!}=12\,600$$

40.4. quatro grupos, dois de duas pessoas e dois de três pessoas?

Temos 10 pessoas.

Tamanhos dos grupos: 2, 2, 3 e 3

Grupos com o mesmo tamanho: 2 grupos de 2 e 2 grupos de 3.

$$\frac{10!}{2!\times 2!\times 3!\times 3!\times 2!\times 2!}=6\,300$$

41. Numa cimeira estiveram presentes a China, o Japão, os EUA e a França. A China fez-se representar por três diplomatas, o Japão por quatro, os EUA por seis e a França por cinco. No final, realizou-se uma conferência de impressa com todos os diplomatas que se sentaram numa mesa retangular com dezoito lugares.

De quantas maneiras se podem sentar os diplomatas de modo que os da China fiquem em lugares consecutivos, assim como os do Japão, mas que não haja um diplomata da China ao lado de um do Japão?

Vamos começar por agrupar num bloco de diplomatas de China e num outro bloco os diplomatas do Japão. Como não pode haver um diplomata do Japão ao lado de um da China, estes dois blocos têm de ocupar posições entre os restantes onze diplomatas (seis dos EUA e cinco de França) ou nas pontas, isto é, podem ocupar as dez posições entre as restantes onze diplomatas mais as duas nas pontas, logo, existem 12 posições para os dois blocos e como os dois blocos podem permutar entre si, ou seja, ${}^{12}C_2 \times 2!$. Para cada uma destas maneiras dentro do bloco da China, os três diplomatas podem permutar entre si de 3! maneiras distintas, assim como dentro do bloco do Japão, os quatro diplomatas podem permutar entre si de 4! maneiras diferentes. Os restantes 11 diplomatas permutam nas onze posições de 11! maneiras distintas.

Portanto os diplomatas podem sentar, de acordo com as condições, de ${}^{12}C_2 \times 2! \times 3! \times 4! \times 11! = 758\,738\,534\,400$