PROBLEMAS DE CONTAGEM 4 MD

1. A turma da Leonor tem 25 alunos, dos quais 13 estão inscritos nas aulas de Espanhol e os restantes estão inscritos nas aulas de Francês.
Determine o número de maneiras diferentes de escolher o delegado e o subdelegado de turma se:
   1.1. não existir qualquer restrição;

   1.2. ambos estiverem inscritos na mesma disciplina;

   1.3. estiverem inscritos em disciplinas diferentes;

   1.4. a Leonor ocupar um dos cargos.

2. O João foi com o pai ver um jogo da seleção nacional.
Com as letras da palavra PORTUGAL quantas palavras de quatro letras, sem as repetir, pode o João formar se:
   2.1. Não há restrições?

   2.2. A primeira letra é uma vogal?

   2.3. A última letra não pode ser P ?

   2.4. Começa e termina com uma consoante?

   2.5. As duas letras nas posições centrais são as únicas vogais?

   2.6. As vogais **A** e **O** são escolhidas e ficam seguidas?

3. Uma sequência de algarismos cuja leitura da direita para a esquerda ou da esquerda para a direita é o mesmo número designa-se por *capicua*. Por exemplo 1234321 é uma capicua.
Quantos números com sete algarismos:
   3.1. São capicuas?

   3.2. São capicuas em que quatro dos algarismos são diferentes?

4. Considere todos os números de seis algarismos que se pode formar utilizando alguns ou todos os algarismos do número 103245.
Destes números quantos:
4.1. São múltiplos de 5?

4.2. Têm os três primeiros algarismos ímpares e diferentes e os três algarismos seguintes pares e iguais entre si?

4.3. São formados apenas pelos algarismos 0 e 1, com pelo menos um 0 e um 1.

5. O Bernardo vai criar uma *password* de cinco caracteres para acesso a uma conta na Internet utilizando algarismos de 0 a 9 e caracteres especiais escolhidos entre os símbolos ! , @ , # , $, % , * e &.
Quantas *passwords* pode criar com:
5.1. Dois algarismos iguais seguidos e três símbolos diferentes?

5.2. Dois símbolos diferentes e três algarismos sabendo que não podem ficar dois algarismos seguidos?

5.3. Três algarismos diferentes e dois símbolos iguais seguidos, no início e ou no fim?

6. A direção da Associação de Estudantes da escola da Bia é constituída por três raparigas e dois rapazes. A Bia é a presidente da direção.
6.1. Os membros da direção vão colocar-se em duas filas para tirarem uma fotografia. Combinaram que:
- os rapazes ficam na fila de trás;
- as raparigas ficam na fila da frente.

De quantas maneiras diferentes se podem colocar:
6.1.1. sem outras restrições?

6.1.2. ficando a Bia no meio?

6.2. Os membros da direção vão colocar-se numa única fila para tirarem outra fotografia.
De quantas maneiras diferentes se podem colocar na fila de forma que:
6.2.1. as três raparigas fiquem seguidas e os dois rapazes fiquem seguidos?

6.2.2. as três raparigas fiquem seguidas?

6.2.3. os dois rapazes fiquem seguidos?

7. Um sistema de catalogação de livros utiliza códigos no formato **LAAAL** , onde:

- **L** representa uma letra do alfabeto (26 letras);
- **A** representa um algarismo (0 a 9).

Quantos códigos pode o sistema gerar?

8. A Ana tem 12 livros distintos: 5 romances, 4 de banda desenhada e 3 policiais.
A Ana pretende escolher dois desses livros e géneros diferentes, para ler nas férias.
Quantas escolhas diferentes pode fazer?

9. Os códigos dos cofres fabricados por uma determinada empresa consistem numa sequência de 4 algarismos, como por exemplo, 0343.
Um cliente vai comprar um cofre dessa empresa e pede que o respetivo código satisfaça as seguintes condições:

- tenha exatamente três algarismos 8;
- a soma dos seus quatro algarismos seja inferior a 29.

Quantos códigos diferentes existem nestas condições?

10. De quantas maneiras se podem colocar os quatro cavalos (dois pretos e dois brancos) num tabuleiro de xadrez, de modo que os cavalos brancos fiquem na mesma linha horizontal e os cavalos pretos fiquem numa outra linha horizontal.

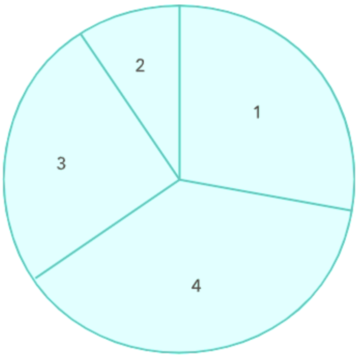
11. Seja A o conjunto de todos os números naturais com cinco algarismos.
Determine o número de elementos do conjunto A:

11.1. Que têm exatamente três algarismos.

11.2. Cujo produto dos respetivos algarismos é par.

12. Uma pequena garrafeira tem espaço para 12 garrafas de vinho. Pretende-se arrumar 10 garrafas, das quais quatro são iguais e as restantes seis são todas diferentes.
Determine o número de maneiras diferentes de arrumar as garrafas na garrafeira.

13. Na figura está representado um círculo dividido em quatro setores circulares diferentes, numerados de 1 a 4. Estão disponíveis cinco cores para pintar este círculo.

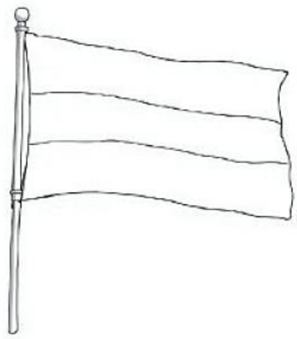


Pretende-se que sejam respeitadas as seguintes condições:

- todos os setores devem ser pintados;
- cada setor é pintado com uma única cor;
- setores com um raio em comum não podem ficar pintados com a mesma cor;
- o círculo deve ficar pintado com duas ou com quatro cores.

De quantas maneiras diferentes pode o círculo ser pintado?

14. Pretende-se fazer uma bandeira com três faixas horizontais, como a que se apresenta na figura.



Estão disponíveis dez cores diferentes para pintar a bandeira, incluindo a cor encarnada.

Pretende-se que sejam respeitadas as seguintes condições :

- todas as faixas devem ser pintadas;
- cada faixa é pintada com uma única cor;
- duas faixas adjacentes não podem ser da mesma cor;
- só pode haver repetição de cor se houver pelo menos uma faixa encarnada.

Quantas bandeiras diferentes se podem fazer?

15. Quantos são os números naturais pares que se podem escrever (na base decimal) com quatro algarismos distintos?

16. Quantos números naturais de 4 algarismos distintos são maiores do que 2400 e não têm os algarismos 3, 5 nem 6?

17. Considere todos os números naturais de quatro algarismos.
Quantos desses números:
17.1. têm algarismos todos diferentes ou todos iguais?

17.2. têm pelo menos dois algarismos iguais?

18. Numa caixa estão seis bolas numeradas de 1 a 6.

De quantas maneiras diferentes se podem colocar, lado a lado, as seis bolas de modo que:
18.1. as bolas com os números 1 e 2 fiquem uma ao lado da outra?

18.2. não fiquem dois algarismos pares seguidos?

18.3. os algarismos pares fiquem seguidos e por ordem crescente?

19. O Tomé vai colorir as faces de um dado cúbico, com as faces numeradas de 1 a 6. Cada face vai ser colorida com uma única cor e o Tomé tem à disposição 8 cores diferentes.
19.1. De quantas formas diferentes é possível colorir o cubo?

19.2. De quantas formas é possível colorir o cubo, de modo que as faces com números pares tenham todas a mesma cor e essa cor seja diferente das cores das restantes faces?

20. Uma turma tem 28 alunos, dos quais 13 são rapazes e 15 são raparigas. Pretende-se formar uma comissão com três alunos.
Quantas comissões diferentes se podem formar se a comissão tiver alunos de ambos os sexos?
Apresentam-se, em seguida, duas respostas corretas a este problema.
i) $15 \times {}^{13}C_2 + 13 \times {}^{15}C_2$
ii) ${}^{28}C_3 - {}^{13}C_3 - {}^{15}C_3$
Numa pequena composição, explique o raciocínio que conduz a cada uma delas.

21. De quantas maneiras podemos tirar 6 cartas de um baralho de 52 cartas, se:

21.1. não foram impostas condições?

21.2. forem todas copas?

21.3. forem 3 de copas e 3 de paus?

21.4. forem 3 de um naipe e 3 de outro?

21.5. forem 4 de copas e 2 de paus?

21.6. forem 4 de um naipe e 2 de outro?

21.7. forem 2 de um valor, um de outro e 3 de outro?

21.8. forem 3 de um valor e 3 de outro?

22. Com um conjunto de 10 livros todos diferentes, sendo 5 de Física, 3 de Matemática e 2 de informática, de quanta maneiras podemos arrumá-los numa prateleira se:

22.1. Não forem impostas condições?

22.2. Tiverem de ficar juntos por temas?

22.3. Só os de Matemática tiverem de ficar juntos?

23. Numa geladaria podem confecionar-se 78 taças diferentes, com dois sabores distintos em cada taça. Quantos sabores distintos em existem nessa geladaria?

24. Um teste tem duas partes: a primeira parte do teste tem cinco questões de escolha múltipla, cada uma com quatro opções de resposta, das quais apenas uma deve ser selecionada; a segunda parte do teste tem 10 questões cuja resposta é "Verdadeiro" ou "Falso".
De quantas maneiras se pode responder às questões desse teste se se responder a todas as questões?

25. Considere todos os números que se podem escrever utilizando os algarismos 1 1 2 2 2 3 3 4 .
Quantos desses algarismos são pares?

26. Um código multibanco é constituído por uma sequência de 4 algarismos. Por exemplo 1234. O código deve ser inserido usando um teclado como o da figura.

Um ladrão observando de longe, conseguiu perceber as seguintes características do código multibanco de um cliente:

- os algarismos são todos diferentes;
- o primeiro e o último algarismos situam-se na mesma linha horizontal;
- o segundo e o terceiro algarismos encontram-se na linha horizontal acima da anterior.

Quantos códigos de multibanco existem nas condições indicadas?

27. Considere o seguinte problema.

Para fazer a decoração de uma festa há quatro bandeiras amarelas iguais, quatro bandeiras vermelhas iguais e quatro bandeiras brancas também iguais entre si. Dez dessas bandeiras vão ser colocadas em fila. Atendendo à cor, quantas sequências diferentes é possível formar?

Uma resposta correta a este problema é:

$$^{3}C_2 \times {}^{10}C_4 \times {}^{6}C_4 + {}^{3}C_2 \times {}^{10}C_3 \times {}^{7}C_3$$

Numa pequena composição, explique o raciocínio que conduz a esta resposta.

28. Numa turma há 25 alunos.

De quantas maneiras se podem sentar nas cinco filas de uma sala de aula, de seis lugares cada uma, de forma que o Bernardo e o Frederico não fiquem juntos lado a lado? (**Apresente apenas a expressão**)

29. A Carla, o Filipe e o Lourenço são alunos do 10.º ano. A Raquel, a Isabel e o Nuno são alunos do 11.º ano. O Simão, a Sandra e a Vitória são alunos do 12.º ano.

29.1. Determine de quantas maneiras se podem colocar em fila estes alunos, de modo que os alunos do mesmo ano fiquem juntos.

29.2. Pretende-se tirar uma fotografia com cinco elementos deste grupo. Determine o número de maneiras de escolher e dispor os cinco elementos na fotografia, sabendo que a Vitória apenas estará na fotografia caso a Raquel também esteja.

30. Considere as letras da palavra MATEMATICA.

Determine o número de maneiras de escrever palavras com cinco dessas letras de modo que:

30.1. as letras sejam todas diferentes;

30.2. sejam usados os três A e as restantes letras sejam todas diferentes;

30.3. duas das letras usadas sejam iguais e as restantes sejam diferentes;

30.4. dois pares de letras sejam iguais;

30.5. pelo menos uma das letras usadas sejam um A e as restantes sejam diferentes;

30.6. sejam utilizados os dois M ou os dois T, mas não em simultâneo.

31. Pretende-se arrumar numa prateleira um conjunto de nove DVD, do qual faz parte a trilogia *O Senhor dos Anéis*.

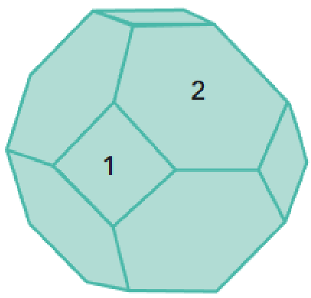
31.1. Determine o número de maneiras diferentes de arrumar os DVD, de forma que os três filmes da trilogia fiquem juntos e ordenados por ano crescente de edição, da esquerda para a direita.

31.2. Determine o número de maneiras de, arrumando os filmes ao acaso, os filmes de *O Senhor dos Anéis* fiquem separados.

32. Observe a figura, onde está representado um sólido constituído por 12 faces, das quais quatro faces são quadrados e oito faces são hexágonos. Duas das faces já estão numeradas com os números 1 e 2.

Pretende-se numerar as restantes faces, com os números de 3 a 12 (um número diferente em cada face).

Escreva uma expressão que dê o número de maneiras diferentes de o fazer, de modo que nas faces que são quadrados sejam colocados, no máximo, dois números ímpares.



33. Uma editora pediu a um jovem autor para incluir, numa compilação de vários autores alguns dos seus contos para crianças. O autor tem n contos inéditos e outros três que já foram publicados anteriormente numa revista. A editora decidiu selecionar dois contos deste autor, inéditos ou não, para incluir na compilação.

Concluiu-se que a editora pode selecionar dois dos contos deste autor de 21 maneiras diferentes.

Determine o número de contos inéditos que estão disponíveis.

34. Um saco contém 30 bolas, indistinguíveis ao tato, das quais n bolas são azuis e as restantes são brancas. Cada bola tem uma única cor e há mais bolas azuis do que bolas brancas.

Sabe-se que o número de maneiras de escolher duas bolas desse saco, de modo que ambas sejam da mesma cor é 219.

Determine o valor de n .

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- resolver a equação apresentada, sem utilizar a calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos.

35. Considere um tabuleiro dividido em 28 casa, como o representado na figura 1. Pretendem dispor-se 20 fichas sobre o tabuleiro: sete azuis, indistinguíveis, seis encarnadas, indistinguíveis, e outras sete, distintas umas das outras, marcadas com uma letra de **A** a **G** (cada peça ocupa uma única casa). Na figura 2 está um exemplo de uma possível disposição.

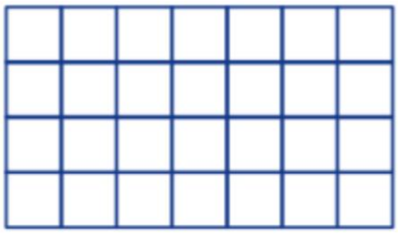


Figura 1

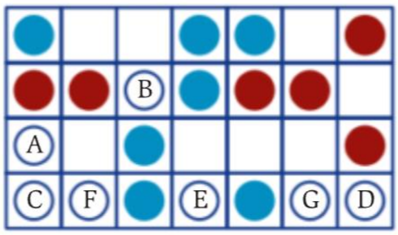


Figura 2

De quantas maneiras se podem colocar as fichas sobre o tabuleiro?

Uma das respostas possíveis a este problema é ${}^{28}C_7 \times {}^{21}C_6 \times {}^{15}A_7$. Outra resposta possível é ${}^{28}C_{20} \times {}^{20}A_7 \times {}^{13}C_7$.

Num breve texto, explique cada uma das respostas.

36. Um baralho de cartas completo é constituído por 52 cartas, repartidas por quatro naipes de treze cartas cada: espadas, copas, paus e ouros. Cada naipe tem três figuras: rei, dama e valete.

36.1. Pretendem colocar-se sete cartas numa só fila, de modo que as três primeiras sejam figuras, a última seja um ás e que as restantes três sejam cartas encarnadas que não sejam figuras nem ases.
Quantas filas diferentes se podem formar?

36.2. De quantas maneiras distintas se podem extrair seis cartas do baralho, de modo que exatamente duas sejam espadas e que, entre as restantes quatro, existam no máximo três ouros?

37. Um saco contém 16 bolas indistinguíveis ao tato.
Três bolas estão numeradas com o número 1, cinco bolas com o número 2 , seis bolas com o número 3 e duas bolas com o número 4.

De quantas maneiras distintas se podem colocar 16 bolas numa só fila, de modo que as bolas numeradas com o número 2 fiquem juntas?

38. Quantos números de 16 algarismos se podem formar com os algarismos do número 1 233 325 671 211 229?

39. Considere todos os algarismos que se podem escrever com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

39.1. Em quantos desses números o algarismo 2 aparece exatamente duas vezes?

39.2. Em alguns desses números os dois últimos algarismos são pares e a soma dos seus algarismos é um número par. Quantos são estes números?
Justifique que uma resposta a este problema é $4^5 + {}^3C_2 \times 5^2 \times 4^3$.

40. Considere que um grupo de dez pessoas foram contratadas para uma mesma função.
De quantas maneiras se podem dividir as dez pessoas em:

40.1. dois grupos de cinco pessoas?

40.2. três grupos, dois de quatro pessoas e um de duas?

40.3. quatro grupos, um de uma pessoa, um de duas, um de três e um de quatro?

40.4. quatro grupos, dois de duas pessoas e dois de três pessoas?

41. Numa cimeira estiveram presentes a China, o Japão, os EUA e a França. A China fez-se representar por três diplomatas, o Japão por quatro, os EUA por seis e a França por cinco. No final, realizou-se uma conferência de impressa com todos os diplomatas que se sentaram numa mesa retangular com dezoito lugares.

De quantas maneiras se podem sentar os diplomatas de modo que os da China fiquem em lugares consecutivos, assim como os do Japão, mas que não haja um diplomata da China ao lado de um do Japão?