1. Completa cada uma das seguintes igualdades:

a) $15! =$ ___ $\times\, 14!$

$15! = 15 \times 14!$

b) $16! \,\times$ ___ $= 17!$

$16! \times 17 = 17!$

c) $\frac{5!}{5} =$ ___!

$\frac{5!}{5} = \frac{5\times 4!}{5} = 4\,!$

d) $\frac{9!}{8!} =$ ___

$\frac{9!}{8!} = \frac{9\times 8!}{8!} = 9$

e) $\frac{7!}{5!} =$ ___

$\frac{7!}{5!} = \frac{7\times 6\times 5!}{5!} = 7 \times 6 = 42$

2. Resolve, em $\mathbb{N}$, as seguintes equações:

a) $\frac{n^2}{5!} = 1 + \frac{n^2}{6!}$

$\underset{(6)}{\frac{n^2}{5!}} = \underset{(6!)}{1} + \frac{n^2}{6!} \Leftrightarrow 6\,n^2 = 720 + n^2 \Leftrightarrow 5\,n^2 = 720 \Leftrightarrow n^2 = 144 \Leftrightarrow n = 12$

b) $\frac{(n+1)!-n!}{(n+1)!+n!} = 0{,}9$

$\frac{(n+1)!\,-n!}{(n+1)!\,+n!} = 0{,}9 \;\Leftrightarrow\; \frac{(n+1)\times n!\,-n!}{(n+1)\times n!\,+n!} = 0{,}9 \;\Leftrightarrow\; \frac{n!\,(n+1-1)}{n!\,(n+1+1)} = 0{,}9 \;\Leftrightarrow\; \frac{n}{n+2} = \frac{9}{10} \underset{(*)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow 10\,n = 9\,n + 18 \Leftrightarrow n = 18$ $\quad(*)$ O universo é $\mathbb{N}$

3. O código de acesso a um determinado serviço de internet é constituído por cinco letras e dois algarismos. Admite que os dois algarismos estão sempre situados nas duas últimas posições.
Admite, ainda, que podem ser usadas as 26 letras do alfabeto e os 10 algarismos.
Determina quantos códigos diferentes se podem formar:

a) se não houver restrições;

$26^5 \times 10^2 = 1\,188\,137\,600$

b) não repetindo letras e não repetindo algarismos;

${}^{26}A_5 \times {}^{10}A_2 = 710\,424\,000$

c) que não contenham vogais e em que os dois algarismos sejam iguais;

$21^5 \times 10 \times 1 = 40\,841\,010$

d) em que as três primeiras letras sejam vogais e apenas possam utilizados os algarismos 3, 5 e 7;

$5^3 \times 26^2 \times 3^2 = 760\,500$

eduardo.pinhao@matematicaparatodos.pt

e) que não contenham consoantes e em que as letras sejam todas diferentes;

$5! \times 10^2 = 12\,000$

f) em que a soma dos dois algarismos sejam um número ímpar maior do que 12.

$26^5 \times 12$ (os algarismos só podem ser as permutações do 7 e o 6, ou as permutações do 7 e o 8, ou as permutações do 8 e o 9, ou as permutações do 9 e o 6, ou as permutações do 9 e o 4, ou as permutações do 8 e o 5) $= 142\,576\,512$

4. Seja M o conjunto dos números naturais maiores do que 1000 e menores do que 5666.

a) Quantos elementos de M têm os algarismos todos diferentes?

$4 \times {}^9A_3$ (primeiro algarismo inferior a 5) $+ 5 \times {}^8A_2$(primeiro algarismo 5 e segundo inferior a 5) $+ 5 \times 7$ (números da forma 56_ _) $= 2331$

b) Quantos elementos de M não têm dois algarismos consecutivos iguais?

4×9^3 (primeiro algarismo inferior a 5) $+ 5 \times 9^2$(primeiro algarismo 5 e segundo inferior a 5) $+ 5 \times 9$ (números da forma 56_ _) $+ 9$ (números da forma 565 _) $= 3375$

c) Quantos elementos de M são capicuas?

$4 \times 10 \times 1 \times 1$ (primeiro algarismo inferior a 5) $+ 6 \times 1 \times 1$ (primeiro algarismo 5 e segundo inferior ou igual a 5) $+ 1 \times 1$ (números da forma 56_ _) $= 47$

5. Numa paragem de um autocarro estão 12 pessoas: seis homens e seis mulheres. Dois dos homens são idosos.
Para um autocarro que apenas tem 10 lugares sentados disponíveis.
Os idosos são as primeiras pessoas a entrar e vão sentar-se. Seguidamente, sentam-se as seis mulheres. Finalmente, sentam-se mais dois homens.
De quantas maneiras diferentes podem ficar ocupados os dez lugares sentados, respeitando estas condições?

${}^{10}A_2$ (número de maneiras de sentar os idosos) $\times {}^8A_6$ (número de maneiras de sentar as mulheres) $\times {}^4A_2$(número de maneiras de sentar dois dos quatro homens não idosos nos dois lugares disponíveis) $= 21\,772\,800$

6. Cada equipa de futebol é constituída por doze jogadores: seis efetivos e seis suplentes.
O treinador de uma certa equipa vai escolher os seis efetivos para iniciar um jogo.
Quantas escolhas diferentes pode fazer?

${}^{12}C_6 = 924$

7. Quantos são os números naturais ímpares de cinco algarismos que têm exatamente dois algarismos iguais a zero?

$\boxed{P_1}$ $\boxed{P_2}$ $\boxed{P_3}$ $\boxed{P_4}$ $\boxed{P_5}$

Os zeros só podem aparecer nas posições P_1 , P_2 e P_3, isto é, há ${}^3C_2$, para colocar os dois zeros, e para a posição que sobra existem 9, opções, porque não pode ser o zero.

Na posição P_1, como o zero não pode ser considerado, temos 9 opções, os algarismos de 1 a 9.

Na posição P_5, o algarismo escolhido deve ser ímpar, 1, 3, 5, 7 e 9, logo existem 5 opções.

Portanto existem $9\times {}^3C_2 \times 9\times 5 = 1\,215$ números

8. Considera cinco pontos pertencentes a uma circunferência.

a) Quantas cordas existem com extremos nestes pontos?

${}^5C_2 = 10$

b) Quantos triângulos existem com vértices nestes pontos?

${}^5C_3 = 10$

9. A Maria vai organizar um lanche. Para isso, vai a uma pastelaria onde se vendem 14 tipos de diferentes bolos.

a) Se a Maria comprar seis bolos diferentes, quantas escolhas pode fazer?

${}^{14}C_6 = 3\,003$

b) A maria optou por comprar seis bolos iguais. Vai dispô-los num prato dividido em dez setores, cada um com a sua cor. De quantas maneiras diferentes pode a Maria dispor os seis bolos no prato?

${}^{10}C_6 = 210$

10. A direção de uma coletividade tem de se fazer representar por três dos seus sete membros, numa cerimónia oficial. Os sete membros da direção são a Ana, a Sofia, a Lurdes, o Mário, o Agostinho, o Paulo e o Artur.

a) Quantas comissões diferentes poderão ser constituídas?

${}^7C_3 = 35$

b) Quantas comissões diferentes poderão ser constituídas em qua a Ana esteja incluída?

${}^6C_2 = 15$

c) Quantas comissões diferentes poderão ser constituídas em qua a Ana e o Artur não estejam simultaneamente?

${}^7C_3 - 5$ (entram em simultaneo a Sofia e o Artur) $= 30$

d) Quantas comissões poderão ser constituídas, de tal modo que os dois sexos estejam representados?

${}^{7}C_3 - {}^{4}C_3$ (só rapazes) $- 1$(só raparigas) $= 30$

11. O João tem uma caixa para guardar lápis e canetas. A caixa está dividida em dez compartimentos diferentes. Cada compartimento só pode ser ocupado por um único lápis ou por uma única caneta.
O João vai guardar cinco lápis, todos iguais, e cinco canetas, todas diferentes.
Quantas disposições diferentes poderão ocorrer?

${}^{10}A_5$ (canetas) $\times {}^{5}C_5$(lápis) $= 30\,240$ ou ${}^{10}C_5$(lápis) $\times {}^{5}A_5$ (canetas) $= 30\,240$

12. Cada chave do Euromilhões é constituída por cinco números (de entre os números naturais de 1 a 50) e por dois números, as estrelas (de entre os números naturais de 1 a 12).
Quantas chaves diferentes poderão ocorrer?

${}^{50}C_5 \times {}^{12}C_2 = 139\,838\,160$

13. Queremos colocar no tabuleiro representado ao lado seis botões brancos, todos iguais, e quatro botões de cores diferentes (um verde, outro amarelo, outro vermelho e outro azul). Cada botão ocupa uma casa e em cada casa nãos e pode colocar mais do que um botão.

13.1. De quantas maneiras diferentes podem os botões ficar dispostos no tabuleiro?

${}^{12}C_6 \times {}^{6}A_4 = 332\,640$

13.2. De quantas maneiras diferentes podem os botões ficar dispostos no tabuleiro, se os botões qua não são brancos ficarem todos numa mesma fila?

$3 \times 4! \times {}^{8}C_6 = 2\,016$

14. O casal Rocha tem dois filhos e o casal Costa tem três.

Num certo dia, os dois casais e os respetivos filhos juntam-se num jantar e, no fim, dispõem-se ao acaso, lado a lado, para tirarem uma fotografia.

De quantas maneiras se podem dispor, de modo que os elementos de cada família fiquem juntos?

$4! \times 5! \times 2 = 5\,760$

15. Os 20 alunos de uma turma do 12º ano, 12 rapazes e 8 raparigas, vão fazer teste de Matemática.

15.1. A professora fez três versões do enunciado do teste: são seis enunciados da versão 1, seis enunciados da versão 2 e oito enunciados da versão 3. Os enunciados vão ser distribuídos ao acaso.

De quantas maneiras podem ser distribuídos os enunciados dos testes da versão 3?

$$^{20}C_6 \times {}^{14}C_6 \times 1 = 116\,396\,280$$

15.2. A «fila da janela» tem seis mesas individuais. De quantas maneiras pode ser ocupada, ficando duas raparigas nos dois primeiros lugares?

$$^{8}A_2 \times {}^{18}A_4 = 4\,112\,640$$

16. O alfabeto Morse usa os símbolos "●" (ponto) e "—" (traço) para codificar mensagens.

16.1. Quantas sequências de cinco símbolos é possível escrever?

$$^{5}A'_2 = 2^5 = 32$$

16.2. Sabendo que determinada sequência tem seis símbolos e começa e acaba com um traço, quantas sequências possível escrever nestas condições?

$$\boxed{-}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{-}$$

$$^{4}A'_2 = 2^4 = 16$$

16.3. Qual é o número de sequências que é possível escrever com o número máximo de quatro símbolos?

1 símbolo	$\boxed{}$	2
2 símbolos	$\boxed{}\ \boxed{}$	2^2
3 símbolos	$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}$	2^3
4 símbolos	$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}$	2^4

$$2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$$

16.4. Quantas sequências de seis símbolos é possível escrever que tenham os dois símbolos do meio iguais?

$$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{-}\ \boxed{-}\ \boxed{}\ \boxed{} \quad \text{ou} \quad \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{\bullet}\ \boxed{\bullet}\ \boxed{}\ \boxed{}$$

$$2^4 + 2^4 = 16 + 16 = 32$$

16.5. Quantas sequências de seis símbolos é possível escrever que tenham pelo menos dois pontos?

Se ao todo for retirado a hipótese de ter só um ponto ou nenhum ponto, temos as sequências com pelo menos dois pontos.

Nenhum ponto: 1 sequência $\boxed{-}\ \boxed{-}\ \boxed{-}\ \boxed{-}\ \boxed{-}\ \boxed{-}$

Com 1 ponto: 6 sequências $\boxed{\bullet}\ \boxed{-}\ \boxed{-}\ \boxed{-}\ \boxed{-}\ \boxed{-}\ \cdots\ \boxed{-}\ \boxed{-}\ \boxed{-}\ \boxed{-}\ \boxed{-}\ \boxed{\bullet}$

$$2^6 - (1+6) = 57$$

17. Para um determinado jogo da Seleção Nacional de futebol, o selecionador convocou 23 jogadores: três guarda-redes, seis defesas, oito médios e seis avançados.

De quantas maneiras o selecionador pode formar a equipa sabendo que:

17.1. pretende jogar com um guarda-redes, quatro defesas, três médios e três avançados?

$$\underbrace{{}^{3}C_1}_{\text{Guarda-redes}} \times \underbrace{{}^{6}C_4}_{\text{Defesas}} \times \underbrace{{}^{8}C_3}_{\text{Médios}} \times \underbrace{{}^{6}C_3}_{\text{Avançados}} = 50\,400$$

17.2. pretende jogar com um guarda-redes, quatro defesas, quatro médios e dois avançados?

$$\underbrace{{}^{3}C_1}_{\text{Guarda-redes}} \times \underbrace{{}^{6}C_4}_{\text{Defesas}} \times \underbrace{{}^{8}C_4}_{\text{Médios}} \times \underbrace{{}^{6}C_2}_{\text{Avançados}} = 47\,250$$

18. Num saco estão seis bolas azuis, numeradas de 1 a 6, e sete bolas verdes, numeradas de 1 a 7.

Retiram-se todas as bolas do saco, uma a uma, sem reposição, e alinham-se sobre uma mesa.

Quantas sequências diferentes é possível formar com as 13 bolas desde que:

18.1. não haja qualquer restrição?

$$13! = 6\,227\,020\,800$$

18.2. as bolas da mesma cor fiquem seguidas?

$$6! \times 7! \times 2 = 7\,257\,600$$

18.3. as bolas azuis fiquem seguidas?

As bolas azuis podem ficar seguidas em $13-6+1=8$ posições das 13 disponíveis. Como as bolas azuis estão numeradas, a ordem importa, logo, temos $8\times 6!$ possibilidades para as bolas azuis.
As bolas verdes ficam nas restantes sete posições, como estão numeradas, permutam entre si, isto é existem 7! hipóteses.

Portanto é possível formar $8\times 6!\times 7!=29\,030\,400$ sequências

18.4. as bolas verdes fiquem seguidas e por ordem crescente?

As sete bolas verdes podem ficar em $13-7+1=7$ posições das 13 disponíveis, não podendo permutar entres si porque têm que ficar por ordem decrescente.
As restantes bolas, 6, azuis ficam nos lugares que sobram, podendo permutar entre si.

Portanto, existem $7\times 6!=5\,040$ sequências

18.5. não haja bolas verdes seguidas

$\boxed{V_1}\ \boxed{A_1}\ \boxed{V_2}\ \boxed{A_2}\ \boxed{V_3}\ \boxed{A_3}\ \boxed{V_4}\ \boxed{A_4}\ \boxed{V_5}\ \boxed{A_5}\ \boxed{V_6}\ \boxed{A_6}\ \boxed{V_7}$

Portanto, existem $7!\times 6!=3\,628\,800$ sequências