



1. Determina sem recurso à calculadora:

$$1.1. \frac{6!}{3 \times 4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{3 \times 4!} = \frac{30}{3} = 10$$

$$1.2. \frac{8!}{4! \times 3!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3 \times 2 \times 1} = 8 \times 7 \times 5 = 280$$

$$1.3. \frac{9!}{5! + 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! + 6 \times 5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!(1+6)} = 9 \times 8 \times 6 = 432$$

$$1.4. {}^7C_4 \times 3! = \frac{7!}{4! \times 3!} \times 3! = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

$$1.5. {}^5A_2 \times 3! = \frac{5!}{3!} \times 3! = 5! = 120$$

$$1.6. {}^6C_4 \times {}^4A_2 = \frac{6!}{4! \times 2!} \times \frac{4!}{2!} = \frac{6!}{2 \times 2} = \frac{720}{4} = 180$$

$$1.7. \frac{{}^5A_3}{4!} = \frac{5!}{4!} = \frac{5!}{2! \times 4!} = \frac{5 \times 4!}{2! \times 4!} = \frac{5}{2}$$

$$1.8. \frac{{}^5C_3}{4!} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4!}{4! \times 3! \times 2!} = \frac{5}{3 \times 2 \times 2} = \frac{5}{12}$$

2. Resolva as seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 2.1. \quad & \frac{(n+2)!+(n+1)!}{n!} = 120 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \frac{(n+2)(n+1)n!+(n+1)n!}{n!} = 120 \wedge (n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}_0) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow n^2 + n + 2n + 2 + n + 1 = 120 \wedge (n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}_0) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow n^2 + 4n - 117 = 0 \wedge (n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}_0) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow n = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 4 \times 117}}{2} \wedge (n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}_0) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow n = 9 \vee n = -13 \wedge (n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}_0) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow n = 9
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.2. \quad & {}^n A_2 = 342 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} = 342 \wedge ((n-2)! \neq 0, n \geq 2) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 342 \wedge ((n-2)! \neq 0, n \geq 2) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow n^2 - n - 342 = 0 \wedge ((n-2)! \neq 0, n \geq 2) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 342}}{2} \wedge ((n-2)! \neq 0, n \geq 2) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow n = 19 \vee n = -18 \wedge ((n-2)! \neq 0, n \geq 2) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow n = 19
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2.3. \quad & {}^{n-1} A_3 = 3 {}^{n-2} A_2 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \frac{(n-1)!}{(n-4)!} = 3 \frac{(n-2)!}{(n-4)!} \wedge ((n-4)! \neq 0, n \geq 4) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (n-1)(n-2)! = 3(n-2)! \wedge ((n-4)! \neq 0, n \geq 4) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow n-1 = 3 \wedge ((n-4)! \neq 0, n \geq 4) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow n = 4 \wedge ((n-4)! \neq 0, n \geq 4) \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow n = 4
 \end{aligned}$$

2.4. ${}^n C_2 = 136 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 136 \quad \wedge ((n-2)! \neq 0, n \geq 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{2!(n-2)!} = 136 \quad \wedge ((n-2)! \neq 0, n \geq 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n - 272 = 0 \quad \wedge ((n-2)! \neq 0, n \geq 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \times 272}}{2} \quad \wedge ((n-2)! \neq 0, n \geq 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 17 \vee n = -16 \quad \wedge ((n-2)! \neq 0, n \geq 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 17$$

2.5. ${}^{n-1} C_3 = 3 {}^{n-2} C_2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)!}{3!(n-4)!} = 3 \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} \quad \wedge ((n-4)! \neq 0, n \geq 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n-1)(n-2)!}{3 \times 2!} = \frac{3(n-2)!}{2!} \quad \wedge ((n-4)! \neq 0, n \geq 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n-1}{3} = 3 \quad \wedge ((n-4)! \neq 0, n \geq 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 10$$

2.6. ${}^n C_2 + {}^n A_2 = 360 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{n!}{(n-2)!} = 360 \quad \wedge ((n-2)! \neq 0, n \geq 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} + \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 360 \quad \wedge ((n-2)! \neq 0, n \geq 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 - n + 2n^2 - 2n - 720 = 0 \quad \wedge ((n-2)! \neq 0, n \geq 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3n^2 - 3n - 720 = 0 \quad \wedge ((n-2)! \neq 0, n \geq 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4 \times 3 \times 720}}{6} \quad \wedge ((n-2)! \neq 0, n \geq 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 16 \vee n = -15 \quad \wedge ((n-2)! \neq 0, n \geq 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 16$$

3. Quantos são os divisores naturais de:

3.1. $2310 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$

Logo, o número de divisores naturais é $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$

3.2. $2700 = 2^2 \times 3^3 \times 5^2$

Logo, o número de divisores naturais é $3 \times 4 \times 3 = 36$

4. De quantos modos distintos se podem arrumar cinco automóveis numa garagem com oito lugares de estacionamento?

Como a ordem é relevante não se podem repetir: ${}^8A_5 = 6720$

5. De quantas formas diferentes se podem escolher três sabores de um gelado numa gelataria com dez sabores disponíveis?

Como a ordem dos gelados não é relevante: ${}^{10}C_3 = 120$

6. A turma da Beatriz tem 28 alunos, dos quais 12 são rapazes. De quantas maneiras diferentes pode resultar a eleição do delegado e do subdelegado de turma se:

6.1. o delegado for rapariga e o subdelegado for rapaz?

$$16 \times 12 = 192$$

6.2. o delegado e o subdelegado forem do mesmo sexo?

$$16 \times 15 + 12 \times 11 = 372$$

6.3. a Beatriz for eleita?

$$1 \times 27 \times 2 = 54$$

7. Um grupo de três homens e quatro mulheres vai posar para uma fotografia, colocando-se lado a lado. De quantas maneiras se podem colocar:

7.1. Se não houver restrições?

$${}^7A_7 = 7! = 5040$$

7.2. Se os homens ficarem todos juntos?

Podemos escolher a ordem dos homens de 3! maneiras diferentes e a ordem das mulheres de 4! maneiras diferentes.

Existem 5 possibilidades para colocar o grupo de homens.

Conforme o exemplo:

H	H	H	M	M	M	M	}	5 possibilidades
M	H	H	H	M	M	M		
M	M	H	H	H	M	M		
M	M	M	H	H	H	M		
M	M	M	M	H	H	H		

Assim, $3! \times 4! \times 5 = 720$

7.3. Se os homens ficarem todos juntos e as mulheres também?

A ordem dos dois grupos pode ser escolhida de 2! maneiras diferentes.

Homem - Mulher ou Mulher - Homem

$$2 \times 3! \times 4! = 288$$

7.4. De forma a não haver duas mulheres juntas?

M H M H M H M

É a única possibilidade existente para as mulheres não ficarem juntas.

No entanto existem 4! maneiras de escolher a ordem das mulheres e 3! maneiras diferentes de escolher a ordem dos homens.

Logo, $4! \times 3! = 144$

8. Uma orquestra possui no seu repertório nove sinfonias de Beethoven, vinte sinfonias de Mozart e oito sinfonias de Schubert.
- 8.1. Quantas apresentações diferentes se podem fazer se uma apresentação desta orquestra consistir numa sinfonia de Beethoven, seguida de uma de Mozart e, por fim, uma sinfonia de Schubert?
Existem 9 sinfonias de Beethoven, 20 de Mozart e 8 de Schubert.
Logo, $9 \times 20 \times 8 = 1440$
- 8.2. Quantas apresentações diferentes se podem fazer se uma apresentação desta orquestra consistir numa sinfonia de cada um dos compositores, por qualquer ordem?
Neste caso a ordem interessa, logo temos 3! maneiras diferentes dos compositores serem escolhidos.
 $9 \times 20 \times 8 \times 3! = 8640$
- 8.3. Quantas apresentações se podem fazer se puderem ser escolhidas três quaisquer obras?
 ${}^{37}A_3 = 46\,620$
9. Num congresso há dez professores de Física e Química, doze de Biologia e quinze de Matemática. Quantas comissões de cinco professores se podem formar:
- 9.1. se não houver restrições?
 ${}^{37}C_5 = 435\,897$ (a ordem não é relevante)
- 9.2. com dois professores de Matemática, dois de Biologia e um de Física e Química?
A comissão é formada por:
2 professores de Matemática - ${}^{15}C_2$
2 professores de Biologia - ${}^{12}C_2$
1 professor de Física e Química - ${}^{10}C_1$
 ${}^{15}C_2 \times {}^{12}C_2 \times {}^{10}C_1 = 69\,300$
- 9.3. com exatamente três professores de Matemática?
3 professores de Matemática: ${}^{15}C_3$
Como são exatamente 3 professores de Matemática, depois destes terem sido escolhidos temos que os retirar das restantes possibilidades, ou seja, $37 - 15 = 22$, e as possibilidades são: ${}^{22}C_2$
 ${}^{15}C_3 \times {}^{22}C_2 = 105\,105$

9.4. com, no máximo, dois professores de Biologia?

Existem 3 casos possíveis:

1.º não existem professores de Biologia: ${}^{25}C_5$

2.º existe apenas um professor de Biologia: ${}^{25}C_4 \times {}^{12}C_1$

3.º existem dois professores de Biologia: ${}^{25}C_3 \times {}^{12}C_2$

$${}^{25}C_5 + {}^{25}C_4 \times {}^{12}C_1 + {}^{25}C_3 \times {}^{12}C_2 = 356\,730$$

10. Considera o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Quantos números de quatro algarismos diferentes é possível formar que sejam:

10.1. Superiores a 3000?

$3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
Algarismos superiores ou iguais a 3	Todos, menos o anterior	Todos menos os dois algarismos anteriores	Todos menos os três algarismos colocados nos dígitos anteriores
7	8	7	6
$7 \times 8 \times 7 \times 6 = 2352$			

10.2. Pares?

Para que um número seja par, o algarismo das unidades tem que ser par.

Todos menos o algarismo das unidades	Todos menos o algarismo das unidades e o algarismo dos milhares	Todos menos o algarismo das unidades, o algarismo dos milhares e o das dezenas	Algarismos Par
8	7	6	4

$$8 \times 7 \times 6 \times 4 = 1344$$

10.3. Múltiplos de 5?

Neste caso, para que um número seja múltiplo de 5, o algarismo das unidades tem que ser o 5.

Dezenas de milhar	Milhares	Centenas	Unidades
8	7	6	1

$$8 \times 7 \times 6 \times 1 = 336$$

10.4. Inferiores a 5840?

Seja x o número pretendido:

$$4 \times 8 \times 76 = 1344, \quad x < 5000$$

$$1 \times 6 \times 7 \times 6 = 252, \quad 5000 \leq x < 5800$$

$$1 \times 1 \times 1 \times 3 \times 6 = 18, \quad 5800 \leq x < 5840$$

$$\text{Assim, } 1344 + 252 + 18 = 1614$$

11. Quantos são os anagramas da palavra ESCOLA que têm:

11.1. as letras ES juntas por essa ordem?

$E \quad S \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square$
 $\square \quad E \quad S \quad \square \quad \square \quad \square$
 $\square \quad \square \quad E \quad S \quad \square \quad \square$
 $\square \quad \square \quad \square \quad E \quad S \quad \square$
 $\square \quad \square \quad \square \quad \square \quad E \quad S$

$$5 \times 4! = 120$$

11.2. as letras ESC juntas por qualquer ordem?

Como as letras ESC podem permutar entre si, existem $3!$ possibilidades de as colocar.

Para as letras ESC ficarem agrupadas existem 4 possibilidades $(6 - 3 + 1) = 4$

e para as restantes três letras, existem $3!$ maneiras diferentes de as colocarmos.

$$4 \times 3! \times 3! = 144$$

11.3. as vogais e as consoantes intercaladas?

Temos dois casos possíveis para intercalar as vogais e as consoantes

Vogal Consoante Vogal Consoante Vogal Consoante
Consoante Vogal Consoante Vogal Consoante Vogal

Como as três vogais podem permutar entre si, temos $3!$ possibilidades e como as consoantes podem permutar entre si, temos $3!$ possibilidades.

$$\text{Assim, } 2 \times 3! \times 3! = 72$$

11.4. a letra E no primeiro lugar e a letra A no último lugar?

$E \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad A$

Como as letras do meio podem trocar entre si, temos $4!$ maneiras diferentes de as colocar.

$$\text{Assim, } 1 \times 4! \times 1 = 24$$

12. Considera todos os números naturais com cinco algarismos.

Quantos desses números:

12.1. têm os algarismos todos diferentes e são pares?

Dois casos possíveis.

1.º termina com o algarismo 0

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 1 = 3024$$

2.º termina com os 2 ou 4 ou 6 ou 8

$$8 \times 8 \times 7 \times 6 \times 4 = 10\,752$$

$$3024 + 10752 = 13776$$

12.2. têm os algarismos todos diferentes e são maiores que 89 000 ?

Dois casos possíveis:

$$1 \times 1 \times 8 \times 7 \times 6 = 336, \text{ se } 89\,000 \leq x < 90\,000$$

$$1 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 1728, \text{ se } 90\,000 \leq x \leq 99\,999$$

13. De quantas maneiras se podem sentar n pessoas em n cadeiras se:

13.1. a Alice e o Bruno ficarem juntos?

$$2!(n-1)!$$

13.2. a Alice e o Bruno ficarem separados?

$$n! - 2! \times (n-1)! = n(n-1)! - 2!(n-1)! = (n-2)(n-1)!$$

13.3. a Alice, o Bruno e a Carla ficarem juntos?

$$3!(n-2)!$$

13.4. a Alice, o Bruno e a Carla ficarem juntos e o Daniel e a Elsa ficarem também juntos?

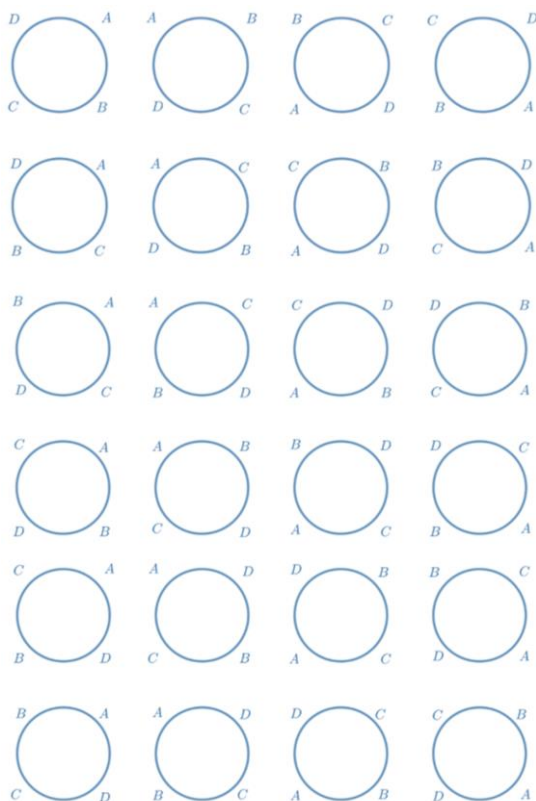
$$3! \times 2! \times (n-3)!$$

14. De quantos modos se podem sentar quatro casais numa mesa circular se:

Um dos processos de resolução é através das permutações circulares.

Vamos supor que só temos Mulheres, sendo A, B, C e D cada uma delas.

A figura seguinte corresponde à lista de todas permutações das quatro mulheres.



Como se pode observar, as permutações de cada uma das filas, é na realidade apenas uma, isto porque cada uma das mulheres não troca de lugar, o que existem são rotações.

Verifique-se a primeira fila, a mulher A está sempre na mesma posição em relação às outras mulheres (à direita está a D , à frente está a C e à esquerda está a B) apenas existe uma rotação no sentido positivo de cada uma delas. Assim temos apenas 6 maneiras diferentes de elas se sentarem.

Se considerarmos apenas as 4 mulheres, percebemos que para cada permutação de 4 mulheres temos 4 sequências formadas pelas mesmas. Desta forma, neste o total de permutações circulares das 4 mulheres

$$\text{é } \frac{4!}{4} = \frac{4 \times 3!}{4} = 3! = 6$$

Uma permutação circular de n objetos é cada uma das disposições possíveis quando dispomos os n objetos à volta de um círculo, considerando idênticas aquelas que coincidem por rotação.

O número de permutações circulares de n objetos distintos é $(n - 1)!$

14.1. dois quaisquer homens não ficarem juntos?

Começemos por sentar as 4 mulheres numa mesa circular.

O número de maneiras de arranjar n objetos numa mesa circular é $(n - 1)!$

Assim, as 4 mulheres podem sentar-se de $(4 - 1)! = 3! = 6$

Estando as mulheres sentadas, com 4 espaços entre elas, vamos sentar os homens, em que cada um deve ocupar um desses 4 espaços, como há 4 homens e 4 lugares disponíveis, o número de maneiras de sentar os homens é $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

Portanto, existem $4 \times 24 = 144$ maneiras de se sentarem 4 casais de modo a que dois quaisquer homens não ficarem juntos.

14.2. cada homem ficar ao lado da sua namorada?

Como cada homem tem que ficar ao lado da sua namorada, temos que a namorada pode estar ao seu lado de duas formas distintas (à sua direita ou à sua esquerda). Neste caso temos arranjos com repetições. Cada casal sentado de duas maneiras diferentes ${}^2A'_4 = 2^4 = 16$, e temos uma permutação circular dos 4 casais, $(4 - 1)! = 3! = 6$

Logo ${}^2A'_4 \times 3! = 16 \times 6 = 96$

14.3. dois quaisquer homens não ficarem juntos e cada homem ficar ao lado da namorada?

Queremos saber de quantas maneiras 4 casais se podem sentar à volta de uma mesa circular com 8 lugares, de modo que dois quaisquer homens não fiquem juntos e que cada homem fique com a namorada ao seu lado.

Como não se sentam juntos dois homens, concluímos que não se sentam juntas duas mulheres, percorrendo a mesa no sentido positivo ou negativo temos que há sempre casais ordenados da seguinte forma: Mulher – Homem ou Homem – Mulher. Como são 4 casais, podemos considerá-los com um único bloco a ser permutado circularmente à volta da mesa.

Logo, $2 \times (4 - 1)! = 2 \times 3! = 12$

15. A figura representa dez ruas que se cortam perpendicularmente, das quais seis são verticais. Só são possíveis deslocações para este e para norte.

Quantos caminhos existem entre A e B que:

Neste caso a ordem não é relevante.

- 15.1. não têm qualquer restrição?

1.º processo

O retângulo cuja diagonal é $[AB]$ está decomposto em 5×3 quadrículas.

Cada caminho para B tem um comprimento igual a 8 lados de quadrícula e pode ser definido por uma sequência de 5 letras **E** e 3 letras **N**.

Por exemplo, as sequências:

EEENEENN e **NNEEEENE**

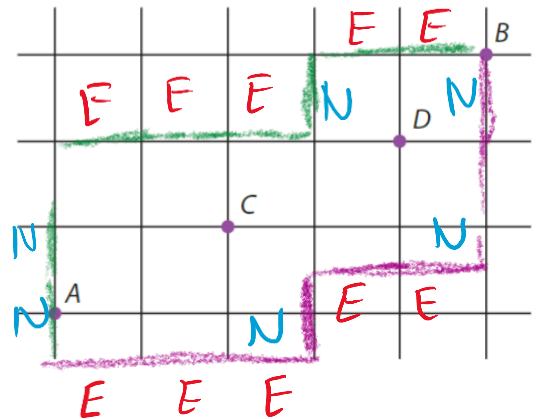
correspondem aos caminhos indicados na figura.

Portanto o número de caminhos é dado por:

$${}^8C_5 = 56 \text{ (escolha do lugar das letras E na sequência)}$$

ou

$${}^8C_3 = 56 \text{ (escolha do lugar das letras N na sequência)}$$



2.º processo

Como o caminho de A para B tem um comprimento igual a 8 lados de quadrícula, temos 8! maneiras diferentes de fazer o caminho, e temos uma sequência com cinco letras E e três letras N.

Logo existem $\frac{8!}{5!3!} = 56$ caminhos possíveis entre A e B

- 15.2. passam por C ?

$${}^3C_2 \times {}^5C_3 = 30$$

- 15.3. não passam por C ?

$${}^8C_5 - {}^3C_2 \times {}^5C_3 = 26$$

- 15.4. passam por C e por D ?

$${}^3C_2 \times {}^3C_2 \times 2 = 18$$

- 15.5. não passam por C ou não passam por D ?

$${}^8C_5 - {}^3C_2 \times {}^3C_2 \times 2 = 38$$

- 15.6. passam por C ou por D ?

$${}^3C_2 \times {}^5C_3 + {}^6C_4 \times 2 - {}^3C_2 \times {}^3C_2 \times 2 = 42$$

- 15.7. não passam por C nem por D ?

$${}^8C_5 - ({}^3C_2 \times {}^5C_3 + {}^6C_4 \times 2 - {}^3C_2 \times {}^3C_2 \times 2) = 14$$

16. Lançou-se um dado cúbico, com as faces numeradas de 1 a 6, e um dado octaédrico, com as faces numeradas de 1 a 8, e registaram-se os números das faces que ficaram voltadas para cima.

Quantos são os resultados possíveis para esta experiência?

$$6 \times 8 = 48$$

17. Considera os conjuntos $A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $C = \{2, 4, 8\}$

Em referencial o.n. $Oxyz$, considera os pontos tais que as abcissas pertencem ao conjunto A , as ordenadas pertencem ao conjunto B e as cotas pertencem ao conjunto C

Quantos são esses pontos?

$$4 \times 5 \times 3 = 60$$

18. Um saco contém sete cartões, numerados de 1 a 7. Extrai-se um cartão do saco, regista-se o algarismo nele inscrito e repõe-se o cartão no saco. Efetua-se este procedimento três vezes. Os três algarismos registados formam um número. A primeira extração corresponde ao algarismo das centenas, a segunda ao das dezenas e a terceira ao das unidades.

- 18.1. Quantos números é possível formar?

Como existe reposição dos cartões, ${}^7A'_3 = 7^3 = 343$

- 18.2. Dos números que é possível formar, determina quantos:

- 18.2.1. têm exatamente dois algarismos pares;

Para o algarismo ímpar temos 3 posições possíveis (nas centenas, nas dezenas ou nas unidades) e como existem 4 algarismos ímpares (1, 3, 5, 7) temos 4 hipóteses de escolher um.

Como existem 3 algarismos pares (2, 4, 6) para cada uma das duas posições existem 3 possibilidades de escolher um.

Assim, $3 \times 4 \times 3 \times 3 = 108$

- 18.2.2. são ímpares.

Como existem 4 algarismos ímpares (1, 3, 5, 7)

Temos $7 \times 7 \times 4 = 196$

19. Seis jovens, a Ana, a Carla, o Frederico, a Beatriz, o Bernardo e a Filipa vão concorrer a um sorteio de seis viagens, a saber, a Barcelona, Berlim, Londres, Madrid, Paris e Roma.

Supondo que cada jovem vai ganhar uma viagem, de quantas maneiras diferentes pode resultar este sorteio?

Como não existe repetição e o número de jovens é igual ao número de viagens,

temos uma permutação $P_6 = {}^6A_6 = 6! = 720$

20. Oito atletas vão fazer uma corrida.

De quantas maneiras diferentes se poderão colocar três deles no pódio

${}^8A_3 = 336$

21. Com os algarismos 2, 3, 5 e 7, quantos números naturais se podem escrever que tenham no máximo quatro algarismos, nunca repetindo algarismos em cada número?

Com um algarismo: 1 possibilidade

Com dois algarismos: 4A_2 possibilidades

Com três algarismos: 4A_3 possibilidades

Com quatro algarismos: 4A_4 possibilidades

$1 + {}^4A_2 + {}^4A_3 + {}^4A_4 = 64$

22. A Lurdes quer arrumar doze livros de aventuras numa prateleira de uma estante, que tem o tamanho exato para o efeito. Desses doze livros, cinco são da coleção *Uma Aventura*, de Ana Maria Magalhães e Isabel Alçada, quatro são da coleção *Os Cinco*, de Enid Blyton, e os restantes três são de uma coleção de Júlio Verne.

Determina de quantas maneiras diferentes podem os doze livros ficar dispostos na prateleira, se:

- 22.1. não houver restrições;

$P_{12} = {}^{12}A_{12} = 12! = 479\ 001\ 600$

- 22.2 na extremidade esquerda ficar um livro de Júlio Verne;

Como existem 3 livros de Júlio Verne temos 3 maneiras diferentes de, na extremidade esquerda, termos um livro de Júlio Verne.

Assim, $3 \times {}^{11}A_{11} = 3 \times 11! = 119\ 750\ 400$

- 22.2. na extremidade esquerda ficar com um livro de Júlio Verne e na extremidade direita ficar um livro de Enid Blyton;

Existem três livros de Júlio Verne e quatro livros de Enid Blyton.

Logo, $3 \times 4 \times {}^{10}A_{10} = 12 \times 10! = 43\ 545\ 600$

- 22.3.** os dois livros do meio forem ambos da coleção *Uma Aventura*;
 Para os livros do meio temos $5 \times 4 = 20$ maneiras de os arrumar.
 Para os restantes livros $10!$
 Assim, $20 \times 10! = 72\,576\,000$
- 22.4.** os quatro livros do meio forem os da coleção *Os Cinco*;
 Sendo os quatro livros do meio da coleção *Os Cinco* temos $4!$ maneiras de os arrumar.
 Para os restantes livros temos $8!$ maneiras de os arrumar.
 Logo, $4! \times 8! = 967\,680$
- 22.5.** os livros de cada coleção ficarem juntos;
 Para a ordenação das coleções temos $3!$ possibilidades
 Para a coleção de livros *Uma Aventura* temos $5!$ maneiras de os arrumar
 Para a coleção de livros *Os Cinco* temos $4!$ maneiras de os arrumar
 Para a coleção de livros de Júlio Verne temos $3!$ maneiras de os arrumar
 Logo, $3! \times 5! \times 4! \times 3! = 103\,680$
- 22.6.** os livros de Júlio Verne ficarem juntos;
 Temos $12 - 3 + 1 = 10$ possibilidades de arrumar os livros de Júlio Verne ficarem juntos.
 Para os livros de Júlio Verne temos $3!$ maneiras de os arrumar.
 Para os restantes livros temos $9!$ possibilidades.
 Assim, $10 \times 3! \times 9! = 21\,772\,800$
- 22.7.** o livro *Os Cinco na Ilha do Tesouro* não ficar ao lado do livro *Uma Aventura em Lisboa*;
 $12! - 11 \times 10! \times 2 = 399\,168\,000$
- 22.8.** os dois livros do meio forem de coleções diferentes
 A sem restrições ($12!$) vamos retirar:
 Os dois do meio serem da coleção *Uma Aventura* $5 \times 4 \times 10!$
 Os dois do meio serem da coleção *Os Cinco* $4 \times 3 \times 10!$
 Os dois do meio serem da coleção de Júlio Verne $3 \times 2 \times 10!$
 Assim, $12! - 5 \times 4 \times 10! - 4 \times 3 \times 10! - 3 \times 2 \times 10! = 341\,107\,200$

23. Seja $P = \{2, 3, 5, 7\}$. Considera o conjunto A dos números naturais compreendidos entre 10 a 1000 cujos algarismos pertencem ao conjunto P .

23.1. Determina o cardinal de A .

$$4^2 (\text{números de dois algarismos}) + 4^3 (\text{números de três algarismos}) = 80$$

23.2. Determina quantos elementos de A têm os algarismos todos diferentes.

$${}^4A_2 + {}^4A_3 = 36$$

23.3. De entre os elementos de A considerados na alínea anterior, determina quantos são múltiplos de 2 ou de 5.

$$2 \times (3 \times 1 + 3 \times 2 \times 1) = 18$$

23.4. Determina quantos elementos do conjunto A têm dois ou três algarismos iguais

$$(4^2 + 4^3) - ({}^4A_2 + {}^4A_3) = 44$$