**GEOMETRIA ANALÍTICA – PRODUTO ESCALAR 4**

**1.** Na figura está representado um paralelogramo, em que $\overline{AD} = 3$ e $\overline{AB} = 5$ .

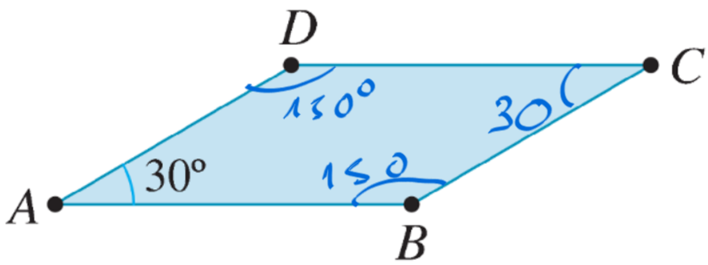
Determina:

**1.1.** $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$

**1.2.** $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$

**1.3.** $\overrightarrow{DC} \times \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}\right)$

**1.4.** $\overrightarrow{CB} \times \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}\right)$




1.1 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AD}\| \times \cos(\overrightarrow{AB} \hat{\ } \overrightarrow{AD})$

$= 5 \times 3 \times \cos 30^\circ = 15 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$

1.2 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$

1.3 $\overrightarrow{DC} \times (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{DC} \times 2\overrightarrow{AB}$

$= 2\, \overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{AB} = 2 \times \overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{DC} = 2\|\overrightarrow{DC}\|^2$

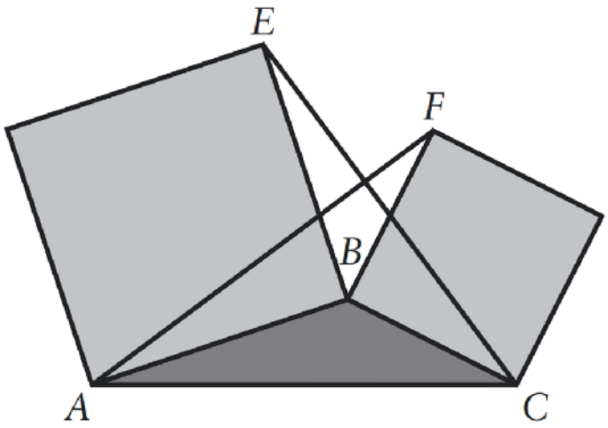
$= 2 \times 5^2 = 50$

1.4 $\overrightarrow{CB} \times (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) =$

$= \overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BC}$

$= -\|\overrightarrow{BC}\|^2 = -3^2 = -9$

**2.** Considera um triângulo $[ABC]$ e dois quadrados construídos sobre dois dos seus lados, como se ilustra na figura.




Prova, recorrendo ao produto escalar de vetores, que $\overrightarrow{EC}$ e $\overrightarrow{AF}$ são perpendiculares.

**Sugestão:** escreve cada um dos vetores $\overrightarrow{EC}$ e $\overrightarrow{AF}$ como soma de vetores e relaciona as amplitudes dos ângulos $ABC$ e $EBF$ .

$$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$$

Assim, $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{AF} = (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}) =$

$$= \underbrace{\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{AB}}_{=0} + \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BF}}_{=0} =$$

$$= \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BF} = -\|\overrightarrow{BE}\| \cdot \|\overrightarrow{BF}\| \cos(E\hat{B}F)$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = -\|\overrightarrow{BC}\| \|\overrightarrow{BA}\| \cos(A\hat{B}C)$$

$$= -\|\overrightarrow{BF}\| \|\overrightarrow{BE}\| \cos(A\hat{B}C)$$

Como $ABE$ e $CBF$ são ambos ângulos retos, tem-se que $A\hat{B}C + E\hat{B}F = 180^\circ$

Assim, $A\hat{B}C = 180^\circ - E\hat{B}F$

Então $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = -\|\overrightarrow{BF}\| \|\overrightarrow{BE}\| \cos(A\hat{B}C)$

$$= -\|\overrightarrow{BF}\| \|\overrightarrow{BE}\| \cos(180^\circ - E\hat{B}F)$$

$$= \|\overrightarrow{BF}\| \|\overrightarrow{BE}\| \cos(E\hat{B}F)$$

$E\hat{B}F \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Portanto,

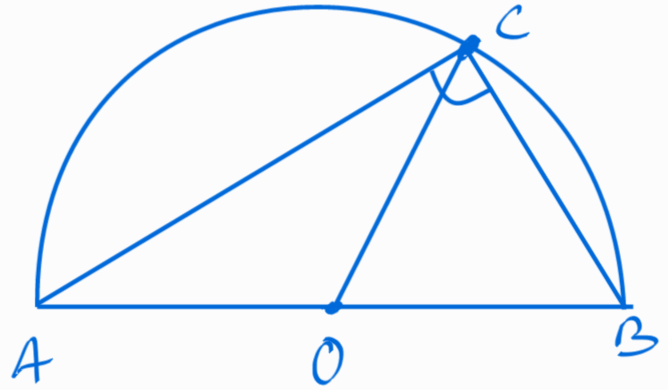
$\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} =$

$= -\|\overrightarrow{BE}\| \|\overrightarrow{BF}\| \cos(E\hat{B}F) + \|\overrightarrow{BF}\| \|\overrightarrow{BE}\| \cos(E\hat{B}F)$

$= 0$

Portanto, $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{AF} = 0$, conclui-se que os vetores $\overrightarrow{EC}$ e $\overrightarrow{AF}$ são perpendiculares.

**3.** Utilizando o produto escalar, prova que um ângulo inscrito numa semicircunferência é reto.




O ângulo $ACB$ é reto se $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$

Temos que $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA}$

e $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB}$

Assim, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB}) =$

$$= \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{CO} \cdot \underset{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{OB}} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} \cdot \underset{\overrightarrow{AO}}{\overrightarrow{OB}} =$$

$$= \|\overrightarrow{CO}\|^2 + \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AO} =$$

$$= \|\overrightarrow{CO}\| + \underbrace{\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CO}}_{=0} - \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AO} =$$

$$= \|\overrightarrow{CO}\| + 0 - \|\overrightarrow{AO}\|^2$$

$\|\overrightarrow{CO}\| = \|\overrightarrow{AO}\|$, são raios

logo $\|\overrightarrow{CO}\| - \|\overrightarrow{AO}\| = 0$

Então $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$, Portanto ACB é um ângulo reto.