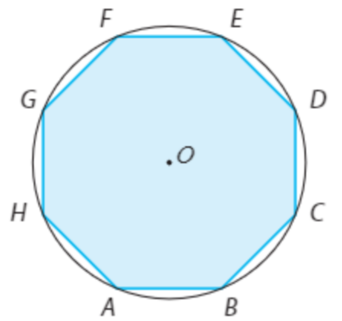
Geometria Analítica – Produto escalar de vetores 3 **RESOLUÇÃO**

1. Na figura encontra-se representado um octógono regular $[ABCDEFGHG]$, de lado 2, inscrito numa circunferência de centro O.



Calcula:

a) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BF}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FE} = 2 \times 2 \times \cos 0^\circ = 4$

b) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 2 \times 2 \times \cos 90^\circ = 0$

c) $\overrightarrow{AH} \times \overrightarrow{ED}$

$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{ED} = 2 \times 2 \times \cos 180^\circ = -4$

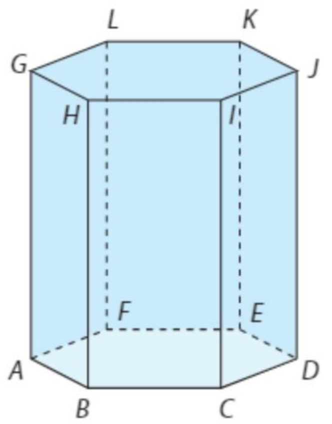
d) $\overrightarrow{GH} \times \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{GH} \cdot \overrightarrow{BC} = 2 \times 2 \times \cos 135^\circ = -2\sqrt{2}$

Cálculo auxiliar

$\alpha = \dfrac{180^\circ \times (8-2)}{8} = 135^\circ$, sendo α a amplitude de um ângulo interno do octógono.

2. A figura representa um prisma hexagonal regular $[ABCDEFGHIJKL]$.



Sabe-se que $\overline{AB} = 2$ e $\overline{AG} = 5$.

Calcula:

a) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{LI}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{LI} = 2 \times 4 \times \cos 0^\circ = 8$

b) $\overrightarrow{AF} \times \overrightarrow{EK}$

$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EK} = 2 \times 5 \times \cos 90^\circ = 0$

c) $\overrightarrow{BE} \times \overrightarrow{JG}$

$\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{JG} = 4 \times 4 \times \cos 120^\circ = -8$

d) $\overrightarrow{HI} \times \overrightarrow{CF}$

$\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{CF} = 2 \times 4 \times \cos 120^\circ = -4$

d) $\overrightarrow{GJ} \times \overrightarrow{LE}$

$\overrightarrow{GJ} \cdot \overrightarrow{LE} = 4 \times \sqrt{29} \times \cos(K\hat{L}E) =$

$= 4 \times \sqrt{29} \times \dfrac{2\sqrt{29}}{29} = 8$

Cálculos auxiliares

Pelo Teorema de Pitágoras:

$\overline{LE}^2 = 2^2 + 5^2 \Leftrightarrow \overline{LE}^2 = 29$

Ou seja, $\overline{LE} = \sqrt{29}$.

Assim, $\cos(K\hat{L}E) = \dfrac{\overline{LK}}{\overline{LE}} = \dfrac{2}{\sqrt{29}} = \dfrac{2\sqrt{29}}{29}$.

e) $\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{EL}$

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{EL} = 2 \times \sqrt{29} \times \cos(180^\circ - K\hat{L}E) =$

$= 2 \times \sqrt{29} \times \left(-\dfrac{2\sqrt{29}}{29}\right) = -4$

3. Determina a amplitude, em graus, com aproximação às décimas, do ângulo entre as retas r e s, sabendo que:

a) $r: y = \frac{1}{2}x + 2$ e $s: 2y - 3x + 4 = 0$

$r: y = \frac{1}{2}x + 2$

Um vetor diretor de r é, por exemplo, $\vec{r}(2, 1)$.

$s: 2y - 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - 2$

Um vetor diretor de s é, por exemplo, $\vec{s}(2, 3)$.

$\vec{r} \cdot \vec{s} = 2 \times 2 + 1 \times 3 = 7$

$\|\vec{r}\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$\|\vec{s}\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$\cos \alpha = \frac{|7|}{\sqrt{5} \times \sqrt{13}}$

Logo, a amplitude do ângulo entre as retas r e s é, aproximadamente, 29,7º.

b) $r: (x, y) = (1, 2) + k(2, -1), k \in \mathbb{R}$ e $s: (x, y) = (1, 2) + k(-3, 1), k \in \mathbb{R}$

$r: (x, y) = (1, 2) + k(2, -1), k \in \mathbb{R}$

Um vetor diretor de r é, por exemplo, $\vec{r}(2, -1)$.

$s: (x, y) = (1, 2) + k(-3, 1), k \in \mathbb{R}$

Um vetor diretor de s é, por exemplo, $\vec{s}(-3, 1)$.

$\vec{r} \cdot \vec{s} = 2 \times (-3) + (-1) \times 1 = -7$

$\|\vec{r}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

$\|\vec{s}\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

$\cos \alpha = \frac{|-7|}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}}$

Logo, a amplitude do ângulo entre as retas r e s é, aproximadamente, 8,1º.

4. Considera os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tais que $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 6$, $\vec{u} \times \vec{v} = -2$ e $\vec{u} \perp \vec{v}$. Calcula:

a) $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w})$

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = \\ &= -2 + 0 = \\ &= -2\end{aligned}$$

b) $(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v})$

$$\begin{aligned}(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) &= \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = \\ &= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = \\ &= 5^2 - 2^2 = \\ &= 21\end{aligned}$$

c) $-\vec{v} \times (2\vec{v} - \vec{u})$

$$\begin{aligned}(-\vec{v}) \cdot (2\vec{v} - \vec{u}) &= -2\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} = \\ &= -2\|\vec{v}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} = \\ &= -2 \times 2^2 - 2 = \\ &= -10\end{aligned}$$

c) $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{v} - \vec{w}) + \vec{v} \times \vec{w}$

$$\begin{aligned}&(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) + \vec{v} \cdot \vec{w} = \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} = \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w} + \|\vec{v}\|^2 = \\ &= -2 - 0 + 2^2 = \\ &= 2\end{aligned}$$

5. Considera os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tais que $\vec{u}(\sqrt{2}\,, -1)$, $\|\vec{v}\| = 6$ e $(\vec{u}\hat{\ }\vec{v}) = \frac{\pi}{6}$. Determina:

a) $\vec{u} \times \vec{v}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \sqrt{3} \times 6 \times \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9$$

Cálculo auxiliar

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-1)^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

b) $(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})$

$$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = (\sqrt{3})^2 - 18 + 36 = 21$$

c) O número real m tal que o vetor $\vec{w}(m\,, m+2)$ seja perpendicular a $\vec{u}$

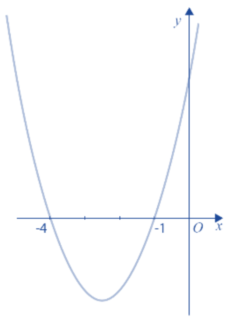
$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}, -1) \cdot (m, m+2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2}m - m - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow m(\sqrt{2} - 1) = 2$$
$$\Leftrightarrow m = \frac{2}{\sqrt{2} - 1} \times \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1}$$
$$\Leftrightarrow m = \frac{2\sqrt{2} + 2}{2 - 1}$$
$$\Leftrightarrow m = 2 + 2\sqrt{2}$$

d) Os valores reais k tais que o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{a}(-\sqrt{8}\,, 5k + k^2)$ seja agudo

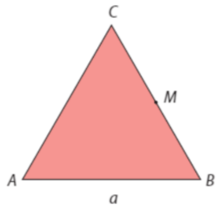
$$\vec{u} \cdot \vec{a} > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}, -1) \cdot (-\sqrt{8}, 5k + k^2) > 0$$
$$\Leftrightarrow -4 - 5k - k^2 > 0$$
$$\Leftrightarrow k^2 + 5k + 4 < 0$$
$$\Leftrightarrow k \in \,]-4, -1[$$

Cálculo auxiliar

$$k^2 + 5k + 4 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{-5 \pm 3}{2}$$
$$\Leftrightarrow k = -4 \vee k = -1$$

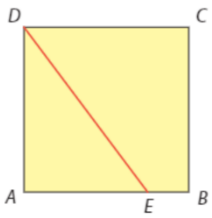


6. Na figura está representado um triângulo equilátero $[ABC]$. Sejam a o comprimento de cada um dos lados do triângulo e M o ponto médio do lado $[BC]$. Mostra que $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AM} = \frac{3a^2}{4}$.



$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) = \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = \\ &= \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{BM}\| \cos 120^\circ = \\ &= a^2 + a \times \frac{a}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \\ &= a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \\ &= \frac{3a^2}{4} \end{aligned}$$

7. Na figura está representado um quadrado $[ABCD]$ de lado igual a 4.



Admite que o ponto E pertence ao segmento de reta $[AB]$ e que o triângulo $[ADE]$ tem área igual a 6. Determina o valor exato de $\overrightarrow{ED} \times \overrightarrow{DC}$

$$\begin{aligned} A_{[ADE]} = 6 &\Leftrightarrow \frac{\overline{AE} \times \overline{AD}}{2} = 6 \\ &\Leftrightarrow \overline{AE} \times 4 = 12 \\ &\Leftrightarrow \overline{AE} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{DC} &= (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{DC} = \\ &= \overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = \\ &= 3 \times 4 \times \cos 180^\circ + 4 \times 4 \times \cos 90^\circ = \\ &= -12 \end{aligned}$$

8. Determina a equação reduzida da reta que passa no ponto A de coordenadas $(2\ ,\ 1)$ e é perpendicular à reta de equação:

a) $2x - 3x + 4 = 0$

$2y - 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - 2$

O declive desta reta é $\frac{3}{2}$, logo o declive de qualquer reta que lhe seja perpendicular é $-\frac{2}{3}$. Assim, a equação reduzida de uma reta perpendicular à reta dada é da forma $y = -\frac{2}{3}x + b$. Como a reta contém o ponto A:

$1 = -\frac{2}{3} \times 2 + b \Leftrightarrow b = \frac{7}{3}$

Logo, a equação pedida é $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$.

b) $(x\ ,y) = (1\ ,2) + k(2\ ,-1)\ ,k \in \mathbb{R}$

$(x, y) = (1, 2) + k(2, -1),\ k \in \mathbb{R}$

O declive desta reta é $-\frac{1}{2}$, logo o declive de qualquer reta que lhe seja perpendicular é 2. Assim, a equação reduzida de uma reta perpendicular à reta dada é da forma $y = 2x + b$. Como a reta contém o ponto A:

$1 = 2 \times 2 + b \Leftrightarrow b = -3$

Logo, a equação pedida é $y = 2x - 3$.

c) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{3}$

Um vetor diretor da reta definida por $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{3}$ é, por exemplo, $\vec{r}(2, 3)$, pelo que o declive desta reta é $\frac{3}{2}$. Logo, o declive de qualquer reta que lhe seja perpendicular é $-\frac{2}{3}$. Assim, a equação reduzida de uma reta perpendicular à reta dada é da forma $y = -\frac{2}{3}x + b$. Como a reta contém o ponto A:

$1 = -\frac{2}{3} \times 2 + b \Leftrightarrow b = \frac{7}{3}$

Logo, a equação pedida é $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$.

d) $\begin{cases} x = k \\ y = 1 - 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

Um vetor diretor da reta definida por

$\begin{cases} x = k \\ y = 1 - 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

é, por exemplo, $\vec{r}(1, -2)$, pelo que o declive desta reta é -2. Logo, o declive de qualquer reta que lhe seja perpendicular é $\frac{1}{2}$. Assim, a equação reduzida de uma reta perpendicular à reta dada é da forma $y = \frac{1}{2}x + b$. Como a reta contém o ponto A:

$1 = \frac{1}{2} \times 2 + b \Leftrightarrow b = 0$

Logo, a equação pedida é $y = \frac{1}{2}x$.

9. Calcula o produto escalar dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e indica, em cada caso, se o ângulo formado pelos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é agudo, reto ou obtuso.

a) $\vec{u}(2, 0, 4)$ e $\vec{v}(0, 3, -2)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 0 + 0 \times 3 + 4 \times (-2) = 0 + 0 - 8 = -8$

Como $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$, o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é obtuso.

b) $\vec{u}(1, 2, \sqrt{5})$ e $\vec{v}(5, 0, -\sqrt{5})$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 5 + 2 \times 0 + \sqrt{5} \times (-\sqrt{5}) = 5 + 0 - 5 = 0$

Como $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é reto.

c) $\vec{u}(2, -3, 1)$ e $\vec{v}(3, -1, -2)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 3 + (-3) \times (-1) + 1 \times (-2) = 6 + 3 - 2 = 7$

Como $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$, o ângulo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é agudo.