Geometria Analítica – Produto escalar de vetores 2 GA

1. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores tais que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ e $(\vec{u} \hat{\ } \vec{v}) = \frac{2\pi}{3}$.

Determina:

a) $(2\vec{u}) \cdot \vec{v}$

b) $\vec{u} \cdot (5\vec{v})$

c) $(-2\vec{u}) \cdot (5\vec{v})$

d) $\vec{u} \cdot (\vec{u} + 4\vec{v})$

2. De um triângulo $[ABC]$ sabe-se que: $\overline{AB} = 10$, $\overline{AC} = 6$ e $B\hat{A}C = 60°$.

a) Determina $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

b) Determina $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

3. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores e seja λ um número real. Mostra que:

a) $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) - (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = 0$

b) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)(\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|)$

c) $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v})$

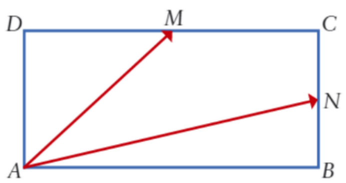
d) $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

4. Na figura está representado o retângulo $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- M é o ponto médio do lado $[DC]$;
- N é o ponto médio do lado $[BC]$;
- $\overline{AC} = 8$.

Determina o valor de $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$.



5. Utilizando o produto escalar, prova que as diagonais de um losango são perpendiculares.

Sugestão: tem em conta que um losango é um paralelogramo com os lados todos iguais.

6. Utilizando o produto escalar, prova que um ângulo inscrito numa semicircunferência é reto.

7. Em referencial o.n. xOy, sejam os vetores $\vec{u}(2, 3)$ e $\vec{v}(-1, 4)$. Determina:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ **b)** $\|\vec{u}\|$ e $\|\vec{v}\|$ **c)** $\cos(\vec{u} \,\hat{}\, \vec{v})$

d) $(\vec{u} \,\hat{}\, \vec{v})$ (em graus, arredondado às unidades)

8. Em referencial o.n. xOy, sejam os pontos $A(2, -1)$, $B(-1, 3)$ e $C(2, 4)$. Determina:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC})$

b) $A\hat{B}C$ (em graus, arredondado às unidades)

9. Em referencial o.n. xOy, sejam os vetores $\vec{u}\left(2, \sqrt{3}\right)$ e $\vec{v}\left(x-4, \sqrt{3x}\right)$, onde x designa um número real. Determina x, de tal modo que:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$; **b)** os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam perpendiculares;

c) os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam colineares; **d)** $(\vec{u} \,\hat{}\, \vec{v}) = 60°$.

10. Considera, em referencial o.n. xOy, os pontos $A(9, 1)$ e $B(12, 5)$.

a) O segmento de reta $[AB]$ é um dos lados de um quadrado $[ABCD]$, contido no primeiro quadrante. O segmento de reta $[BC]$ é outro lado desse quadrado. Determina as coordenadas dos pontos C e D.

b) O segmento de reta $[AB]$ é um dos catetos de um triângulo retângulo $[ABE]$ de área 25, contido no primeiro quadrante. O segmento de reta $[BE]$ é a hipotenusa desse triângulo retângulo. Determina as coordenadas do ponto E.

11. Considera, num plano munido de um referencial ortonormado, os pontos $A(-1, 3)$ e $B(5, 11)$.

Determina uma equação do lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ desse plano, tais que:

a) $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$ **b)** $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

12. Considera, em referencial o.n. xOy, as retas r e s de equações reduzidas $y = 2x + 1$ e $y = -\frac{1}{2}x + 4$, respetivamente. Justifica que as retas r e s são perpendiculares.

13. Considera, em referencial o.n. xOy, a reta r de equação reduzida $y = -\frac{3}{4}x + 2$.

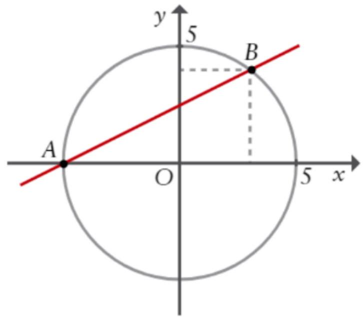
Determina a equação reduzida da reta perpendicular à reta r e que passa no ponto $A(3, 5)$.

14. Na figura ao lado estão representadas, num referencial o.n. xOy, uma reta AB e uma circunferência com centro na origem e raio igual a 5.

Os pontos A e B pertencem à circunferência.

O ponto A também pertence ao eixo das abcissas.

O declive da reta AB é igual a $\frac{1}{2}$.



a) Determina a equação reduzida da reta AB.

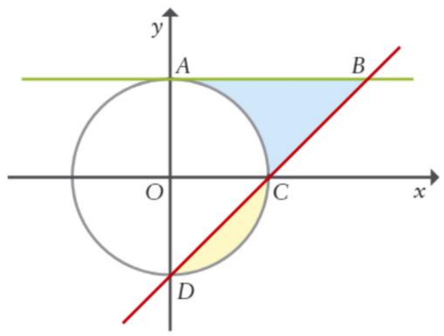
b) Determina as coordenadas do ponto B.

c) Seja C o ponto de coordenadas $(-3, 16)$. Verifica que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B.

d) Seja D o ponto do segundo quadrante que é interseção da circunferência com a mediatriz do segmento de reta $[AB]$. Determina a equação reduzida da tangente à circunferência no ponto D.

15. Na figura ao lado estão representados, num referencial o.n. xOy:

- os pontos A e D, pertencentes ao eixo Oy;
- o ponto C, pertencente ao eixo Ox;
- a circunferência de centro na origem do referencial e raio 10, que passa nos pontos A, C e D;
- a reta BD, que passa no ponto C;
- a reta AB, paralela ao eixo Ox.



Estão assinaladas na figura duas regiões:

- uma, a azul, no primeiro quadrante;
- outra, a amarelo, no quarto quadrante.

a) Determina as coordenadas do ponto B.

b) Determina a equação reduzida da mediatriz do segmento $[BC]$.

c) Define, por meio de uma condição, a região amarela, incluindo a fronteira.

d) Determina a área da região colorida a azul.

e) Seja r a reta tangente à circunferência que é paralela à reta de equação $y = \frac{3}{4}x$ e que tem ordenada na origem positiva. Seja E o ponto de tangência.

Determina as coordenadas do ponto E.

f) Seja α a amplitude do ângulo BOE. Determina $\text{tg}\,\alpha$.

16. Considera, num referencial o.n. xOy, os pontos $A(1, 20)$, $B(-5, -10)$ e $C(17, 12)$.

a) Determina a amplitude do ângulo ABC. Apresenta o resultado em graus, arredondado às décimas.

b) Determina o valor exato da altura do triângulo $[ABC]$ relativa à base $[BC]$.

c) Determina a área do triângulo $[ABC]$.

d) Determina a equação reduzida da circunferência l, circunscrita ao triângulo.

e) Determina a equação reduzida da reta t, tangente à circunferência l no ponto C.

f) Determina a inclinação da reta t. Apresenta o resultado em graus, arredondado às décimas.

17. Considera, num referencial o.n. xOy, a circunferência c de equação $(x-4)^2+(y+3)^2=25$ e o ponto $A(8, 0)$.

a) Mostra que o ponto A e o ponto O (origem do referencial) pertencem à circunferência c.

b) Sejam r e s as tangentes à circunferência c nos pontos A e O, respetivamente.

Determina as coordenadas do ponto de interseção das retas r e s.

c) Designa-se por ângulo de duas retas concorrentes, não perpendiculares, qualquer dos ângulos agudos que elas determinam.

Determina a amplitude do ângulo formado pelas retas r e s.

Apresenta o resultado em graus, arredondado às unidades.

Soluções

1. a) -12	**1. b)** -30	**1. c)** 60	**1. d)** -15	**2. a)** 30	**2. b)** 130
4. 32	**5.** 0	**6.** 0	**7. a)** 10	**7. b)** $\sqrt{17}$	**7. c)** $\frac{10}{\sqrt{221}}$
7. d) $48°$	**8. a)** 35	**8. b)** $72°$	**9. a)** $x = 4$	**9. b)** $x = \frac{8}{5}$	**9. c)** $x = -4$
9. d) $x = 3$	**10. a)** $C(8,8)\ ;\ D(5,4)$		**10. b)** $E(1,7)$	**11. a)** $(x-2)^2 + (y-7)^2 = 25$	
11. b) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$	**13.** $y = \frac{4}{3}x + 1$	**14. a)** $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$	**14. b)** $B(3,4)$	**14. d)** $y = \frac{1}{2}x + \frac{5\sqrt{5}}{2}$	
16. a) $B(20,10)$	**16. b)** $y = -x + 20$	**16. c)** $y \leq x - 10 \wedge x^2 + y^2 \leq 100$		**15. d)** $A_{região\ azul} = 150 - 25\pi$	
15. e) $E(-6,8)$	**15. f)** $\tan \propto = -\frac{11}{2}$	**16. a)** $33{,}7°$	**16. c)** $12\sqrt{2}$	**16. d)** $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 260$	
16. e) $y = -\frac{7}{4}x + \frac{167}{4}$		**16. f)** $119{,}7°$	**17. b)** $I_{Ponto\ de\ interseção}\left(4, \frac{16}{3}\right)$		**17. c)** $74°$