1. Usando o algoritmo da divisão inteira de polinómios, determine o quociente e o resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$

1.1. $A(x)=2x^2-2x-1$ e $B(x)=x+1$

$A(x) = 2x^2 - 2x - 1;\ B(x) = x + 1$

$$
\begin{array}{r|l}
2x^2 - 2x - 1 & x - 1 \\ \cline{2-2}
-2x^2 - 2x \phantom{{}-1} & 2x - 4 \\ \cline{1-1}
-4x - 1 & \\
4x + 4 & \\ \cline{1-1}
3 &
\end{array}
$$

$Q(x) = 2x - 4$
$R(x) = 3$

1.2. $A(x)=4x^2+2x+7$ e $B(x)=2x+1$

$A(x) = 4x^2 + 2x + 7;\ B(x) = 2x + 1$

$$
\begin{array}{r|l}
4x^2 + 2x + 7 & 2x - 1 \\ \cline{2-2}
-4x^2 - 2x \phantom{{}+7} & 2x \\ \cline{1-1}
7 &
\end{array}
$$

$Q(x) = 2x$
$R(x) = 7$

1.3. $A(x)=3x^3+3x^2+3x-14$ e $B(x)=x^2+2x+3$

$A(x) = 3x^3 + 3x^2 + 3x - 14;\ B(x) = x^2 + 2x + 3$

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3 + 3x^2 + 3x - 14 & x^2 + 2x + 3 \\ \cline{2-2}
-3x^3 - 6x^2 - 9x \phantom{{}-14} & 3x - 3 \\ \cline{1-1}
-3x^2 - 6x - 14 & \\
3x^2 + 6x + 9 & \\ \cline{1-1}
-5 &
\end{array}
$$

$Q(x) = 3x - 3$
$R(x) = -5$

1.4. $A(x)=2x^4-8x^3+4x^2+11x-6$ e $B(x)=(x-1)^2$

$A(x)=2x^4-8x^3+4x^2+11x-6$; $B(x)=(x-1)^2=x^2-2x+1$

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4-8x^3+4x^2+11x-6 & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2}
-2x^4-4x^3-2x^2 & 2x^2-4x-6 \\ \cline{1-1}
-4x^3+2x^2+11x-6 & \\
4x^3-8x^2+4x & \\ \cline{1-1}
-6x^2+15x-6 & \\
-6x^2-12x+6 & \\ \cline{1-1}
3x &
\end{array}
$$

$Q(x)=2x^2-4x-6$
$R(x)=3x$

1.5. $A(x)=2x^4-10x^3+2x+9$ e $B(x)=x^2-4$

$A(x)=2x^4-10x^3+2x+9$; $B(x)=x^2-4$

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4-10x^3+0x^2+2x+9 & x^2-4 \\ \cline{2-2}
-2x^4 +8x^2 & 2x^2-10x+8 \\ \cline{1-1}
-10x^3+8x^2+2x+9 & \\
10x^3 -40x & \\ \cline{1-1}
8x^2-38x+9 & \\
-8x^2 +32 & \\ \cline{1-1}
-38x+41 &
\end{array}
$$

$Q(x)=2x^2-10x+8$
$R(x)=-38x+41$

2. Usando a regra de Ruffini, determine o quociente e o resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$

2.1. $A(x)=x^3-7x+9$ e $B(x)=x-2$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 0 & -7 & 9 \\
2 & & 2 & 4 & -6 \\ \hline
 & 1 & 2 & -3 & \boxed{3}
\end{array}
$$

$Q(x)=x^2+2x-3$
$R(x)=31$

2.2. $A(x)=2x^3+x^2-2x$ e $B(x)=x+\frac{1}{2}$

	2	1	-2	0
$-\frac{1}{2}$		-1	0	1
	2	0	-2	$\boxed{1}$

$Q(x)=x^2-2$
$R(x)=1$

2.3. $A(x)=4x^3+22x^2+8x+10$ e $B(x)=x+5$

	4	22	8	10
-5		-20	10	10
	4	2	-2	$\boxed{20}$

$Q(x)=4x^2+2x-2$
$R(x)=20$

2.4. $A(x)=2x^4+\frac{7}{3}x^3-4x^2-x+\frac{2}{3}$ e $B(x)=x+1$

	2	$\frac{7}{3}$	-4	0	$\frac{2}{3}$
-1		-2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$	$-\frac{10}{3}$
	2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{13}{3}$	$\frac{10}{3}$	$\boxed{-\frac{8}{3}}$

$Q(x)=2x^3+\frac{1}{3}x^2-\frac{13}{3}x+\frac{10}{3}$
$R(x)=-\frac{8}{3}$

3. Para cada uma das seguintes igualdades, determine os valores de a e b

3.1. $(ax+b)(x-3)=4x^2-11x-3$

$$(ax+b)(x-3)=4x^2-11x-3 \Leftrightarrow ax+b=\frac{4x^2-11x-3}{x-3}$$

	4	-11	-3
3		12	3
	4	1	$\boxed{0}$

$ax+b=4x+1$
$a=4$ e $b=1$

3.2. $(ax+b)(x+2)=3x^2+8x+4$

$$(ax+b)(x+2)=3x^2+8x+4 \Leftrightarrow ax+b=\frac{3x^2+8x+4}{x+2}$$

	3	8	4
-2		-6	-4
	3	2	0

$ax+b=3x+2$

$a=3$ e $b=2$

3.3. $(ax+b)(x^2-1)=x^3+2x^2-x-2$

$$(ax+b)(x^2-1)=x^3+2x^2-x-2 \Leftrightarrow ax+b=\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-1}$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +2x^2 & -x & -2 & x^2-1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & & +x & & x+3 \\ \cline{1-4}
 & 2x^2 & +0x & -2 & \\
 & -2x^2 & & +2 & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

$ax+b=x+3$

$a=1$ e $b=3$

3.4. $(ax+b)(x^2+4)=2x^3-3x^2+8x-12$

$$(ax+b)(x^2+4)=2x^3-3x^2+8x-12 \Leftrightarrow ax+b=\frac{2x^2-3x^2+8x-12}{x^2+4}$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & +3x^2 & +8x & -12 & x^2+4 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & & -8x & & 2x-3 \\ \cline{1-4}
 & -3x^2 & +0x & -12 & \\
 & 3x^2 & & +12 & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

$ax+b=2x-3$

$a=2$ e $b=-3$

3.5. $(ax+b)(2x^2-3x+4)=4x^3-x+12$

$$(ax+b)(2x^2-3x+4)=4x^3-x+12 \Leftrightarrow ax+b=\frac{4x^3-x+12}{2x^2-3x+4}$$

$$\begin{array}{r|l}
4x^3+0x^2-\ x-12 & 2x^2-3x+4 \\ \cline{2-2}
-4x^3+6x^2-8x & 2x+3 \\ \cline{1-1}
6x^2-9x+12 & \\
-6x^2+9x-12 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

$ax+b=2x+3$

$a=2$ e $b=3$

4. Considere os polinómios $A(x)=-2x^3+6x-4$ e $B(x)=x^2+kx+1$, com $k \in IR$

4.1. Admita que $k=-3$

Determine o polinómio $C(x)$ tal que:

a) $C(x)=2A(x)-B(x)$

$$C(x)=2(-2x^3+6x-4)-(x^2-3x+1)=-4x^3-x^2+12x+3x-8-1=-4x^3-x^2+15x-9$$

b) $B(x)+C(x)=-x^2+3x-2$

$$\begin{aligned}
B(x)+C(x)=-x^2+3x-2 &\Leftrightarrow C(x)=-x^2+3x-2-(x^2-3x+1) \\
&\Leftrightarrow C(x)=-x^2+3x-2-x^2+3x-1 \\
&\Leftrightarrow C(x)=-2x^2+6x-3
\end{aligned}$$

c) $\frac{1}{2}A(x)=(x^2-4)\times C(x)-x-2$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}A(x)=(x^2-4)\times C(x)-x-2 &\Leftrightarrow (x^2-4)C(x)=\frac{1}{2}(-2x^3+6x-4)+x+2 \\
&\Leftrightarrow (x^2-4)C(x)=-x^3+3x-2+x+2 \\
&\Leftrightarrow (x^2-4)C(x)=-x^3+4x \\
&\Leftrightarrow (x^2-4)C(x)=-x(x^2+4)
\end{aligned}$$

$C(x)$ é um polinómio de grau 1, isto é, $C(x)=ax+b$

Assim, $(x^2-4)(ax+b)=-x(x^2+4)$

Logo, $ax+b=-x$

$\therefore C(x)=-x$

4.2. Determine k de modo que $A(x)$ seja divisível por $B(x)$.

Usando o algoritmo da divisão de polinómios

$$\begin{array}{l|l} -2x^3+0x^2+6x-4 & x^2+kx+1 \\ \underline{2x^3+2kx^2+2x} & -2x+2k \\ \quad 2kx^2+8x\quad -4 & \\ \underline{\quad -2kx^2-2k^2x-2k} & \\ \quad (8-2k)x-2k-4 & \end{array}$$

Para que $A(x)$ seja divisível por $B(x)$ o resto tem que ser igual a zero

Assim, $8-2k^2=0 \wedge -4-2k=0 \Leftrightarrow k^2=4 \wedge k=2 \Leftrightarrow k=2$

5. Utilize a regra de Ruffini para determinar o quociente e o resto da divisão de:

5.1. $A(x)=2x^4-3x^2+1$ por $B(x)x-1$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & & 2 & 2 & -1 & -1 \\ \hline & 2 & 2 & -1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$Q(x)=2x^3+2x^2-x-1$ e $R(x)=0$

5.2. $A(x)=2x^3-x+2$ por $B(x)=x+\dfrac{1}{3}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 0 & -1 & 2 \\ -\frac{1}{3} & & -\frac{2}{3} & \frac{2}{9} & \frac{7}{27} \\ \hline & 2 & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{9} & \boxed{\frac{61}{27}} \end{array}$$

$Q(x)=2x^2-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{7}{9}$ e $R(x)=\dfrac{61}{27}$

5.3. $A(x)=x^3-x^2+2x+6$ por $B(x)=2x+4$

$B(x)=2x+4=2(x+2)$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & 2 & 6 \\ -2 & & -2 & 6 & -16 \\ \hline & 1 & -3 & 8 & \boxed{-10} \end{array}$$

$Q(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x+4$ e $R(x)=-10$

6. Use o teorema do resto para:

6.1. Calcular o resto da divisão do polinómio x^3-2x^2+3x+5 por $x-1$

$1^3-2\times1^2+3\times1+5=7$. O resto da divisão é 7.

6.2. Mostrar que o polinómio $P(x)=2x^3-3x^2-11x+6$ é divisível por $x+2$

$P(-2)=2\times(-2)^3-3\times(-2)^2-11\times(-2)+6=-16-12+22+6=0$

Como o resto da divisão de $P(x)$ por $x+2$ é zero, então, $P(x)$ é divisível por $x+2$

6.3. Determinar ***a*** de modo que o resto da divisão de $P(x)=x^2-3x+a$ por $x-5$ seja zero

$P(5)=0\Leftrightarrow 5^2-3\times5+a=0\Leftrightarrow 25-15+a=0\Leftrightarrow a=-10$

6.4. Determinar ***a*** de modo que o polinómio $P(x)=2x^3-5x^2+x+a$ seja divisível por $x-2$

$P(2)=0\Leftrightarrow 2\times2^3-5\times2^2+2+a=0\Leftrightarrow 16-20+2+a=0\Leftrightarrow a=2$

7. Determine, utilizando o teorema do resto, o resto da divisão de:

7.1. $A(x)=x^4-2x^3+x^2-x+3$ por $B(x)=x+2$

$A(-2)=(-2)^4-2\times(-2)^3+(-2)^2-(-2)+3=16+16+4+2+3=41$

7.2. $A(x)=-2x^3+x^2-x+\frac{1}{4}$ por $B(x)=2x-1$

$B(x)=2x+1=2\left(x+\frac{1}{2}\right)$

$$A\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

7.3. $A(x)=x^{n+1}-2x^n+x^{n-1}$ por $B(x)=x+1$

$$A(-1)=(-1)^{n+1}-2\times(-1)^n+(-1)^{n-1}=(-1)\times(-1)^n-2\times(-1)^n+(-1)^{-1}\times(-1)^n=$$
$$=(-1)^n\left(-1-2+(-1)^{-1}\right)=(-1)^n(-3-1)=(-1)^n\times(-4)=-4\times(-1)^n$$

8. Para determinados valores de a e b, o polinómio $P(x)=3x^3+ax^2-bx+6$ é divisível por $x-1$ e o resto da divisão por $x+2$ é igual a -6

Determine os valores de a e b.

$$\begin{cases} P(1)=0 \\ P(-2)=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\times1^3+a\times1^2-b\times1+6=0 \\ 3\times(-2)^3+a\times(-2)^2-b\times(-2)+6=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+a-b+6=0 \\ -24+4a+2b+6=-6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b-9 \\ 4(b-9)+2b=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 4b-36+2b=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 6b=48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8-9 \\ b=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=8 \end{cases}$$

9. Na figura, está representado um retângulo cuja área é dada, em centímetros quadrados, pela expressão $A(x)=2x^4-3x^2-7x+8$

9.1. Diga, justificando, se a altura do retângulo pode ser dada pela expressão $(x+2)$ cm.

A expressão $(x+2)$ pode representar a altura do retângulo se o polinómio $A(x)$ for divisível por $x+2$

$$A(-2)=2\times(-2)^4-3\times(-2)^2-7\times(-2)+8=32-12+14+8=42\neq0$$

Logo $x+2$ não representa a altura do retângulo.

9.2. Determine uma expressão que represente o comprimento do retângulo, sabendo que a largura é representada por $x-1$.

Como $x-1$ representa a largura do retângulo então, $A(x)$ é divisível por $x-1$

Recorrendo ao teorema de Ruffini, temos:

	2	0	-3	-7	8
1		2	2	-1	-8
	2	2	-1	-8	0

Assim, a expressão que representa o comprimento do retângulo é:

$$2x^3+2x^2-x-8$$

10. Considere um polinómio de grau 3, $P(x)$, tal que o resto da divisão de $P(x)$ por $x+1$ é igual a 7 e por $x-2$ é igual a 3.

Determine o resto da divisão de $P(x)$ por $(x+1)(x-2)$

$P(x)=(x+1)(x-2)\times Q(x)+R(x)$ com $R(x)=ax+b$

$$\begin{cases}P(-1)=7\\P(2)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(-1+1)(-1-2)Q(x)+a\times(-1)+b=7\\(2+1)(2-2)Q(x)+a\times 2+b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\times(-3)\times Q(x)-a+b=7\\3\times 0\times Q(x)+2a+b=3\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}b=7+a\\2a+7+a=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=7+a\\3a=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=7-\dfrac{4}{3}\\a=-\dfrac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\dfrac{17}{3}\\a=-\dfrac{4}{3}\end{cases}$$

$R(x)=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{17}{3}$

11. Determine o(s) valore(s) real(is) k de modo que o polinómio $x^6+(k^2-1)$ seja divisível por x^2+2.

$$\begin{array}{rrrrrrr|l}
x^6 & +0x^5 & +0x^4 & +0x^3 & +0x^2 & +0x & +k^2-1 & x^2+2 \\ \hline
-x^6 & & -2x^4 & & & & & x^4-2x^2+4 \\ \hline
 & & -2x^4 & +0x^3 & +0x^2 & +0x & +k^2-1 & \\
 & & 2x^4 & & +4x^2 & & & \\ \hline
 & & & & 4x^2 & +0x & +k^2-1 & \\
 & & & & -4x^2 & & -8 & \\ \hline
 & & & & & & k^2-9 &
\end{array}$$

Assim, $k^2-9=0\Leftrightarrow k^2=9\Leftrightarrow k=\pm 3$

12. Determine os valores ***a*** e ***b*** para os quais:

12.1. A divisão de $P(x)=x^3+ax^2-2x+b$ tem resto $x+6$ na divisão inteira por x^2+x+1

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +ax^2 & -2x & +b & x^2+x+1 \\ \hline
-x^3 & -x^2 & -x & & x+(a-1) \\ \hline
 & (a-1)x^2 & -3x & +b & \\
 & -(a-1)x^2 & -(a-1)x & -(a-1) & \\ \hline
 & & (-a-2)x & -a+b+1 &
\end{array}$$

Assim, $\begin{cases}-a-2=1\\-a+b+1=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\3+b+1=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\b=2\end{cases}$

12.2. A divisão de $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+x+1$ tem resto $2x+1$ na divisão inteira por x^2-1

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^4 \; +ax^3 & +bx^2 & +x & +1 & x^2-1 \\
\cline{5-5}
-x^4 \qquad & +x^2 & & & x^2+ax+(b+1) \\
\cline{1-4}
ax^3 & +(b+1)x^2 & +x & +1 & \\
-ax^3 & & +x & & \\
\cline{1-4}
 & (b+1)x^2 & +(a+1)x & +1 & \\
 & -(b+1)x^2 & & +b+1 & \\
\cline{2-4}
 & & (a+1)x & +b+2 &
\end{array}
$$

Assim, $\begin{cases} a+1=2 \\ b+2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$

13. Seja $A(x)=3x^4+2x^3+kx^2+x+k$, com $k\in IR$

Determine o valor de k, sabendo que:

13.1. o resto da divisão de $A(x)$ por $x-1$ é -1

	3	2	k	1	k
1		3	5	$k+5$	$k+6$
	3	5	$k+5$	$k+6$	$2k+6$

$2k+6=-1 \Leftrightarrow k=-\frac{7}{2}$

13.2. o resto da divisão de $A(x)$ por $x+2$ é 5

	3	2	k	1	k
-2		-6	8	$-2k-16$	$4k+30$
	3	-4	$k+8$	$-2k-15$	$5k+30$

$5k+30=5 \Leftrightarrow k=-\frac{25}{5} \Leftrightarrow k=-5$

13.3. o polinómio $A(x)$ é divisível por $2x-1$

	3	2	k	1	k
$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{2}k+\frac{7}{8}$	$\frac{1}{4}k+\frac{15}{16}$
	3	$\frac{7}{2}$	$k+\frac{7}{4}$	$\frac{1}{2}k+\frac{15}{18}$	$\frac{5}{4}k+\frac{15}{16}$

$\frac{5}{4}k+\frac{15}{16}=0 \Leftrightarrow 20k+15=0 \Leftrightarrow k=-\frac{15}{20} \Leftrightarrow k=-\frac{3}{4}$

14. Considere o polinómio $A(x)=x^5+3x^3+px+q$, com , $p,q\in IR$

Determine os valores de p e de q , sabendo que $A(x)$ é divisível por $x-2$ e que o resto da divisão de $A(x)$ por $x+1$ é 12

	1	0	3	0	p	q
2		2	4	14	28	$2p+56$
	1	2	7	8	$p+28$	$2p+q+56$

	1	0	3	0	p	q
-1		-1	1	-4	4	$-p-4$
	1	-1	4	-4	$p+4$	$-p+q-4$

Assim, $\begin{cases}2p+q+56=0\\-p+q-4=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2p+p+16+56=0\\q=p+16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3p=72\\\text{———}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p=-24\\p=-8\end{cases}$

15. Considere $A(x)=2x^3+ax^2-6x+1$

Determine o valor de a , sabendo que o resto da divisão de $A(x)$ por $x+2$ é igual ao dobro do resto da divisão do mesmo polinómio por $x-1$

	2	a	-6	1
-2		-4	$-2a+8$	$4a-4$
	2	$a-4$	$-2a+2$	$4a-3$

	2	a	-6	1
1		2	$a+2$	$a-4$
	2	$a+2$	$a-4$	$a-3$

Assim, $4a-3=2(a-3)\Leftrightarrow 4a-3=2a-6\Leftrightarrow 2a=-3\Leftrightarrow a=-\frac{3}{2}$

16. Considere o polinómio $P(x)=x^3+3x^2+2x+1$

Determine o(s) valore(s) de a, não nulo(s), de modo que o resto da divisão de $P(x)$ por $A(x)=x-a$ seja o mesmo que o resto da divisão de $P(x)$ por $B(x)=x-2a$

	1	3	2	1
a		a	a^2+3a	a^3+3a^2+2a
	2	$a+3$	a^2+3a+2	a^3+3a^2+2a+1

	1	3	2	1
$2a$		$2a$	$4a^2+6a$	$8a^3+12a^2+4a$
	2	$2a+3$	$4a^2+6a+2$	$8a^3+12a^2+4a+1$

Logo,

$$\begin{aligned} a^3+3a^2+2a+1=8a^3+12a^2+4a+1 &\Leftrightarrow 7a^3+9a^2+2a=0 \\ &\Leftrightarrow a\left(7a^2+9a+2\right)=0 \\ &\Leftrightarrow a=0 \vee 7a^2+9a+2=0 \\ &\Leftrightarrow a=0 \vee a=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4\times7\times2}}{14} \\ &\Leftrightarrow a=0 \vee a=-1 \vee a=-\frac{2}{7} \end{aligned}$$

17. Determine, utilizando o teorema do resto, o resto da divisão de $A(x)$ por $B(x)$

17.1. $A(x)=2x^2-2x-1$ e $B(x)=x-1$

$A(1)=2\times1^2-2\times1-1=2-2-1=-1$

17.2. $A(x)=2x^3+4x^2-x-4$ e $B(x)=x+2$

$A(-2)=2\times(-2)^3+4\times(-2)^2-(-2)-4=-16+16+2-40-2$

17.3. $A(x)=x^2+3x+3$ e $B(x)=x$

$A(0)=0^2+3\times0+3=3$

17.4. $A(x)=2x^4+\frac{7}{3}x^3-4x^2\text{-x+}\frac{2}{3}$ e $B(x)=2x+1$

$2x+1=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

$A\left(-\frac{1}{2}\right)=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^4+\frac{7}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3-4\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}=\frac{1}{8}-\frac{7}{24}-1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=0$

18. Determine o valor de a, sabendo que:

18.1. o resto da divisão de x^3+ax+1 por $x+1$ é igual a 4

$$P(-1)=4 \Leftrightarrow (-1)^3+a\times(-1)+1=4$$
$$\Leftrightarrow -1-a+1=4$$
$$\Leftrightarrow -a=4$$
$$\Leftrightarrow a=-4$$

18.2. o resto da divisão de $x^4+(a-1)x^2+2x+a$ por $2x-4$ é igual a 16

C.A.
$2x-4=0 \Leftrightarrow x=2$

$$P(2)=16 \Leftrightarrow 2^4+(a-1)\times 2^2+2\times 2+a=16$$
$$\Leftrightarrow \cancel{16}+4(a-1)+4+a=\cancel{16}$$
$$\Leftrightarrow 5a=0$$
$$\Leftrightarrow a=0$$

18.3. x^3+ax+1 é divisível por $x-2$

$$P(2)=0 \Leftrightarrow 2^3+2a+1=0$$
$$\Leftrightarrow 2a=-9$$
$$\Leftrightarrow a=-\frac{9}{2}$$

18.4. o resto da divisão de $3x^3-6x^2+ax-1$ por $x+1$ é igual ao resto da divisão do mesmo por $x-3$

$$P(-1)=P(3) \Leftrightarrow 3\times(-1)^3-6\times(-1)^2+a\times(-1)\cancel{-1}=3\times 3^3-6\times 3^2+a\times 3\cancel{-1}$$
$$\Leftrightarrow -3-6-a=81-54+3a$$
$$\Leftrightarrow -4a=36$$
$$\Leftrightarrow a=-9$$

19. Determine os valores de a e de b para os quais:

19.1. $P(x)=x^3+ax^2+bx+5$ quando dividido por $x-2$ tem resto 23 e quando dividido por $x+1$ tem resto 11

$$\begin{cases} P(2)=23 \\ P(-1)=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8+4a+2b+5=23 \\ -1+a-b+5=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b=10 \\ a-b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b=10 \\ a=7+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(7+b)+2b=10 \\ a=7+b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 28+4b+2b=10 \\ a=7+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6b=-18 \\ a=7+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-3 \\ a=7+-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-3 \\ a=4 \end{cases}$$

19.2. $P(x)=2x^3+ax^2+bx-3$ quando dividido por x^2-1 tem resto 0

C.A.
$x^2-1=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=-1$

$$\begin{cases} P(-1)=0 \\ P(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2+a-b-3=0 \\ 2+a+b-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5+b \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5+b \\ 5+b+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5+b \\ 2b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5-2 \\ b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases}$$

19.3. $P(x)=x^3+ax^2+b$ é divisível por x^2+3x+2

C.A.
$x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2} \Leftrightarrow x=-2 \vee x=-1$

$$\begin{cases} P(-1)=0 \\ P(-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1+a+b=0 \\ -8+4a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a \\ 4a+1-a=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a \\ 3a=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-\dfrac{7}{3} \\ a=\dfrac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-\dfrac{4}{3} \\ a=\dfrac{7}{3} \end{cases}$$

20. Sejam $P(x)=x^2+bx+c$ e $Q(x)=x^2-dx+e$ dois polinómios.

Sabendo que $x-p$ é um fator comum a $P(x)$ e a $Q(x)$, mostra que $p=\dfrac{e-c}{b-d}$, com $b\neq d$

$$\begin{cases} P(p)=0 \\ Q(p)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2+pb+c=0 \\ p^2+dp+e=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2=-pb-c \\ -pb-c+dp+e=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p^2=-pb-c \\ p(d-b)-c+e=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ p(d-b)=c-e \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ p=\dfrac{c-e}{d-b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ p=\dfrac{e-c}{b-d} \end{cases}$$ c.q.m.

21. Considere o polinómio $P(x)=x^8+x^7-3x^6-x^5-14x^4-16x^3+48x^2+16x-32$

Determine a multiplicidade da raiz:

21.1. 1

	1	1	-3	-1	-14	-16	48	16	-32
1		1	2	-1	-2	-16	-32	16	32
	1	2	-1	-2	-16	-32	16	32	0
1		1	3	2	0	-16	-48	-32	
	1	3	2	0	-16	-48	-32	0	
1		1	4	6	6	-10	-58		
	1	4	6	6	-10	-58	-90		

1 é raiz de multiplicidade 2 de $P(x)$

21.2. -1

	1	1	-3	-1	-14	-16	48	16	-32
-1		-1	0	3	-2	16	0	-48	32
	1	0	-3	2	-16	0	48	-32	0
-1		-1	1	2	-4	20	-20	-28	
	1	-1	-2	4	-20	20	28	-60	

-1 é raiz de multiplicidade 1 de $P(x)$

21.3. 2

	1	1	-3	-1	-14	-16	48	16	-32
2		2	6	6	10	-8	-48	0	32
	1	3	3	5	-4	-24	0	16	0
2		2	10	26	62	116	184	368	
	1	5	13	31	58	92	185	384	

2 é raiz de multiplicidade 1 de $P(x)$

21.4. -2

	1	1	-3	-1	-14	-16	48	16	-32
-2		-2	2	2	-2	32	-32	-32	32
	1	-1	-1	1	-16	16	16	-16	0
-2		-2	6	-10	18	-4	-24	16	
	1	-3	5	-9	2	12	-8	0	
-2		-2	10	-30	78	-160	296		
	1	-5	15	-39	80	-148	288		

-2 é raiz de multiplicidade 2 de $P(x)$

22. Considere o polinómio $P(x)=x^5-8x^4+21x^3-14x^2-20x+24$

22.1. Verifique que 2 é raiz de $P(x)$

$P(2)=2^5-8\times2^4+21\times2^3-14\times2^2-20\times2+24=32-128+168-56-40+24=0$

Logo, 2 é raiz de $P(x)$

22.2. Determine a multiplicidade da raiz 2

	1	-8	21	-14	-20	24
2		2	-12	18	8	-24
	1	-6	9	4	-12	0
2		2	-8	2	12	
	1	-4	1	6	0	
2		2	-4	-6		
	1	-2	-3	0		
2		2	0			
	1	0	-3			

2 é raiz de multiplicidade 3 de $P(x)$

22.3. Escreva o polinómio na forma $(x-2)^n Q(x)$, onde n representa a multiplicidade da raiz 2

$$P(x)=(x-2)^3(x^2-2x-3)$$

22.4. Determine as restantes raízes do polinómio

$$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)^3(x^2-2x-3)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^3=0 \ \vee \ x^2-2x-3=0$$

$$\Leftrightarrow x=2 \ \vee \ x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=2 \ \vee \ x=-1 \ \ x=3$$

As outras raízes são: -1 e 3

23. Considere o polinómio $P(x)=x^9-x^8-7x^7+7x^6+15x^5-15x^4-13x^3+13x^2+4x-4$

Sabendo que -1 e 1 são raízes do polinómio, determine as respetivas multiplicidades e as restantes raízes do polinómio.

	1	-1	-7	7	15	-15	-13	13	4	-4
1		1	0	-7	0	15	0	-13	0	4
	1	0	-7	0	15	0	-13	0	4	0
1		1	1	-6	-6	9	9	-4	-4	
	1	1	-6	-6	9	9	-4	-4	0	
1		1	2	-4	-10	-1	8	4		
	1	2	-4	-10	-1	8	4	0		
1		1	3	-1	-11	-12	-4			
	1	3	-1	-11	-12	-4	0			
1		1	4	3	-8	-20				
	1	4	3	-8	-20	-24				

1 é raiz de multiplicidade 4 de $P(x)$

As raízes inteiras, caso existam, são divisores inteiros de -4

	1	3	-1	-11	-12	-4
-1		-1	-2	3	8	4
	1	2	-3	-8	-4	0
-1		-1	-1	4	4	
	1	1	-4	-4	0	
-1		-1	0	4		
	1	0	-4	0		
-1		-1	1			
	1	-1	-3			

-1 é raiz de multiplicidade 3 de $P(x)$

Assim, $P(x)$ pode ser escrito na forma $(x-1)^4(x+1)^3(x^2-4)$

Logo, $P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)^4(x+1)^3(x^2-4)=0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^4=0 \vee (x+1)^3=0 \vee x^2-4=0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \vee x=-1 \vee x=-2 \vee x=2$$

Portanto as restantes raízes são: -1 , -2 e 2