1. Utilizando a regra de Ruffini, mostre que o polinómio $A(x)=x^4+6x^3+13x^2+24x+36$ é divisível pelo polinómio $D(x)=(x+3)^2$ e determine o respetivo quociente, $Q(x)$

C.A.
$(x+3)^2=0 \Leftrightarrow x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$ é zero duplo de $A(x)$

	1	6	13	24	36
-3		-3	-9	-12	-36
	1	3	4	12	0
-3		-3	0	-12	
	1	0	4	0	

$Q(x)=x^2+4$

2. Fatorize:

2.1. $x^2-10x+25$

$x^2-10x+25=(x-5)^2$
5 é raiz dupla

2.2. $18-2x^2$

$18-2x^2=2(9-x^2)=2(x-3)(x+3)$

C.A.
$9-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3$

2.3. $-2x^3-8x^2+10x$

$-2x^3-8x^2+10x=-2x(x^2+4x-5)=-2x(x-1)(x-5)$

C.A.
$x^2+4x-5=0 \Leftrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2} \Leftrightarrow x=1 \vee x=5$

2.4. x^3-2x^2-x+2, sabendo que admite 1 como raiz

Regra de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & -2 & -1 & 2 \\
1 & & 1 & -1 & -2 \\
\hline
 & 1 & -1 & -2 & \multicolumn{1}{|c}{0}
\end{array}$$

$$(x-1)(x^2-x-2)=(x-1)(x-2)(x+1)$$

C.A.

$$x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x=-1 \ \vee \ x=2$$

2.5. $-x^4+3x^3+3x^2-11x+6$, sabendo que 1 é um zero de multiplicidade 2

Regra de Ruffini

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & -1 & 3 & 3 & -11 & 6 \\
1 & & -1 & 2 & 5 & -6 \\
\hline
 & -1 & 2 & 5 & -6 & \multicolumn{1}{|c}{0} \\
1 & & -1 & 1 & 6 & \\
\hline
 & -1 & 1 & 6 & \multicolumn{1}{|c}{0} &
\end{array}$$

$$-x^4+3x^3+3x^2-11x+6=(x-1)^2(-x^2+x+6)=(x-1)^2(x-3)(x+2)$$

C.A.

$$-x^2+x+6=0 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{-2} \Leftrightarrow x=3 \ \vee \ x=-2$$

2.6. $-2x^3+2x^2+20x+16$, sabendo que é divisível por $x+2$

Regra de Ruffini

	-2	2	20	16
-2		4	-12	-16
	-2	6	8	0

$$-2x^3+2x^2+20x+16=(x+2)(-2x^2+6x+8)=2(x+2)(-x^2+3x+4)=2(x+2)(x-4)(x+1)$$

C.A.

$$-x^2+3x+4=0 \Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{-2} \Leftrightarrow x=4 \ \vee \ x=-1$$

2.7. $-x^3+x^2+5x+3$, sabendo que tem raízes inteiras

As raízes inteiras do polinómio são divisores inteiros de 3, isto é, podem ser -1 , 1 , -3 ou 3

	-1	1	5	3
-1		1	-2	-3
	-1	2	3	0
-1		1	-3	
	-1	3	0	

$$-x^3+x^2+5x+3=(x+1)^2(-x+3)=-(x+1)^2(x-3)$$

3. Considere o polinómio $P(x)=x^3-3x^2-6x+8$

Sabendo que $P(x)$ é divisível por x^2-5x+4, determine o conjunto solução da equação $P(x)=0$

$$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -3x^2 & -6x & +8 & x^2-5x+4 \\ \cline{5-5} -x^3 & +5x^2 & -4x & & x+2 \\ \cline{1-4} & 2x^2 & -10x & +8 & \\ & -2x^2 & +10x & -8 & \\ \cline{1-4} & & & 0 & \end{array}$$

Assim, $P(x)=0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2-5x+4)=0$

$$\Leftrightarrow x=-2 \ \vee \ x=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=-2 \ \vee \ x=1 \ \vee \ x=4$$

C.S.$=\{-2,1,4\}$

4. Considere os polinómios $P(x)=x^3-3x^2+4$ e $Q(x)=x^3-x^2$

4.1. Mostre que $P(-1)=0$ e decompõe $P(x)$ em fatores do 1.º grau.

Pelo teorema do resto

$P(-1)=(-1)^3-3\times(-1)^2+4=-1-3+4=0$ c.q.m.

Pela regra de Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

Assim, $P(x)=(x+1)(x^2-4x+4)=(x+1)(x-2)(x-2)$

C.A.

$x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-16}}{2} \Leftrightarrow x=2$

4.2. Resolva as inequações:

a) $(2-x)P(x)>0$

$(2-x)(x-2)^2(x+1)>0$

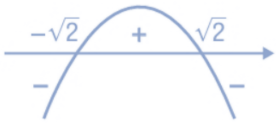
x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
$2-x$	+	+	+	0	−
$(x-2)^2$	+	+	+	0	+
$x+1$	−	0	+	+	+
$(2-x)P(x)$	−	0	+	0	−

$x\in\,]-1\,,\,2[$

b) $P(x) \geq Q(x)$

$$P(x) \geq Q(x) \Leftrightarrow P(x) - Q(x) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 - (x^3 - x^2) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow -2x^2 + 4 \geq 0$$

C.A.
$-2x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \ \vee \ x = \sqrt{2}$



$x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$

5. Determine o polinómio $P(x)$ do quarto grau que admite -3 e -1 como zeros simples e 1 como zero de multiplicidade dois. Sabe-se ainda que o resto da divisão de $P(x)$ por $x+2$ é igual a -9.

Apresente o polinómio $P(x)$ fatorizado.

$$P(x) = a(x-1)^2(x+3)(x+1)$$

$$P(-2) = -9 \Leftrightarrow a(-2-1)^2(-2+3)(-2+1) = -9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a \times 9 \times 1 \times (-1) = -9$$
$$\Leftrightarrow -9a = -9$$
$$\Leftrightarrow a = 1$$

Assim, $P(x) = (x-1)^2(x+3)(x+1)$

6. Considere o polinómio $P(x) = x^3 + bx + c$, onde b e c são números reais

Sabe-se que $P(x)$ é divisível por $x-2$ e -3 é um zero simples de $P(x)$.

6.1. Mostre que $b = -7$ e $c = 6$

$$\begin{cases} P(2) = 0 \\ P(-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^3 + 2b + c = 0 \\ (-3)^3 - 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2b - 8 \\ -27 - 3b - 2b - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2b - 8 \\ -5b = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2 \times (-7) - 8 \\ b = -7 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 6 \\ b = -7 \end{cases}$$

6.2. Fatorize o polinómio $P(x)$

$P(x)=x^3-7x+6$

	1	0	-7	6
-3		-3	9	-6
	1	-3	2	0
2		2	-2	
	1	-1	0	

Portanto, $P(x)=(x+3)(x-2)(x-1)$

7. Resolva, em IR, cada uma das equações.

7.1. $x^4-x^2-6=0$

$$x^4-x^2-6=0 \underset{y=x^2}{\Leftrightarrow} y^2-y-6=0 \Leftrightarrow y=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{2} \Leftrightarrow y=3 \vee y=-2 \underset{x^2=y}{\Leftrightarrow} x^2=3 \vee \underbrace{x^2=-2}_{\text{Impossível em } IR}$$

$$\Leftrightarrow x=-\sqrt{3} \vee x=\sqrt{}$$

C.S.$=\left\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\right\}$

7.2. $2x^4+(2x-1)^2=x(x-4)$

$$2x^4+(2x-1)^2=x(x-4) \Leftrightarrow 2x^4+4x^2-4x+1=x^2-4x$$

$$\Leftrightarrow 2x^4+3x^2+1=0$$

$$\underset{y=x^2}{\Leftrightarrow} y^2+3y+1=0$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y=-1 \vee y=-\frac{1}{2}$$

$$\underset{x^2=y}{\Leftrightarrow} \underbrace{x^2=-1 \vee x^2=-\frac{1}{2}}_{\text{Impossível em } IR}$$

C.S.$=\varnothing$

7.3. $3x^3-6x^2+6x-12=0$

$3x^3-6x^2+6x-12=0 \Leftrightarrow x^3-2x^2+2x-4=0$

Se o polinómio tiver raízes inteiras, estas são divisores inteiros de -4, isto é, -1 , 1 , -2 , 2 , -4 e 4

	1	-2	2	-4
2		2	0	4
	1	0	2	0

$$(x-2)(x^2+2)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \ \vee \ x^2+2=0$$

$$\Leftrightarrow x=2 \ \vee \ \underbrace{x^2=-2}_{\text{Impossível em } IR}$$

C.S.$=\{2\}$

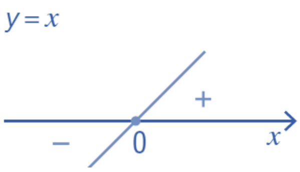
8. Resolva, em IR, cada uma das seguintes inequações.

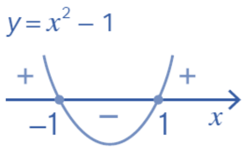
8.1. $x^3 \geq x$

$x^3 \geq x \Leftrightarrow x^3-x \geq 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) \geq 0$

C.A.

$x(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x^2-1=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-1 \vee x=1$





x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x^2-1	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x(x^2-1)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x(x^2-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-1,0] \cup [1,+\infty[$

8.2. $x^4 < 15+2x^2$

$$x^4 < 15+2x^2 \Leftrightarrow x^4-2x^2-15<0 \underset{y=x^2}{\Leftrightarrow} y^2-2y-15<0$$

C.A.

$$y^2-2y-15=0 \Leftrightarrow y=\frac{2\pm\sqrt{4+64}}{2} \Leftrightarrow y=-3 \vee y=5 \underset{y=x^2}{\Leftrightarrow} \overbrace{x^2=-3}^{\text{Impossível}} \vee x^2=5 \Leftrightarrow x=-\sqrt{5} \vee x=\sqrt{5}$$

$$x^4-2x^2-15<0 \Leftrightarrow \left(x^2+3\right)\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)<0$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$	$+\infty$
x^2+3	+	+	+	+	+
$x-\sqrt{5}$	−	−	−	0	+
$x+\sqrt{5}$	−	0	+	+	+
$\left(x^2+3\right)\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)$	+	0	−	0	+

$$x^4-2x^2-15<0 \Leftrightarrow x\in \left]-\sqrt{5},\sqrt{5}\right[$$

8.3. $4x^3-12x^2-x+3>0$, sabendo que $4x^3-12x^2-x+3$ é divisível por $x+\frac{1}{2}$

	4	−12	−1	3
$-\frac{1}{2}$		−2	7	−3
	4	−14	6	0

$$4x^3-12x^2-x+3>0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)\left(4x^2-14x+6\right)>0$$

C.A.

$$4x^2-14x+6=0 \Leftrightarrow x=\frac{14\pm\sqrt{(-14)^2-4\times4\times6}}{8} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \vee x=3$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		3	$+\infty$
$x+\frac{1}{2}$	−	0	+	+	+	+	+
$4x^2-14x+6$	+	+	+	0	−	0	+
$4x^3-12x^2-x+3$	−	0	+	0	−	0	+

$$4x^3-12x^2-x+3>0 \Leftrightarrow x\in \left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right[\cup \left]3,+\infty\right[$$