Polinómios - Divisão, Teorema de Resto, Decomposição, Problemas
Resolução

1. Efetue, em cada uma das alíneas seguintes, a divisão inteira do polinómio $A(x)$ pelo polinómio $B(x)$, apresentando o quociente e o resto.

a) $A(x)=x^3+3x^2-x-5$ e $B(x)=x^2+2x-3$

$$\begin{array}{l|l}
x^3+3x^2-x-5 & x^2+2x-3 \\ \hline
-x^3-2x^2+3x & x+1 \\
\quad x^2+2x-5 & \\
\quad -x^2-2x+3 & \\ \hline
\qquad -2 &
\end{array}$$

$Q(x)=x+1$

$R(x)=-2$

b) $A(x)=4x^3+4x^2-6$ e $B(x)=x-3$

$$\begin{array}{l|l}
4x^3+4x^2+0x-6 & x-3 \\ \hline
-4x^3+12x^2 & 4x^2+16x+48 \\
\quad 16x^2+0x-6 & \\
\quad -16x^2+48x & \\ \hline
\qquad 48x-6 & \\
\qquad -48x+144 & \\ \hline
\qquad\quad 138 &
\end{array}$$

$Q(x)=4x^2+16x+48$

$R(x)=138$

c) $A(x)=8x^4-10x^2+2$ e $B(x)=4x^3+4x^2-x-1$

$$\begin{array}{l|l}
8x^4+0x^3-10x^2+0x+2 & 4x^3+4x-x-1 \\ \hline
-8x^4-8x^3+2x^2+2x & 2x-2 \\
\quad -8x^3-8x^2+2x+2 & \\
\quad 8x^3+8x^2-2x-2 & \\ \hline
\qquad 0 &
\end{array}$$

$Q(x)=2x-2$

$R(x)=0$

d) $A(x)=2x^3+3x^2+x$ e $B(x)=6x^3+9x^2-18$

$$\begin{array}{l|l}
2x^3+3x^2+x+0 & 6x^3+9x^2-18 \\ \hline
-2x^3-3x^2+6 & \frac{1}{3} \\ \hline
\quad x+6 &
\end{array}$$

$Q(x)=\frac{1}{3}$

$R(x)=x+6$

e) $A(x)=x^2+4x-8$ e $B(x)=x^2+9x$

$$\begin{array}{l|l}
x^2+4x-8 & x^2+9x \\ \hline
-x^2-9x & 1 \\ \hline
\quad -5x-8 &
\end{array}$$

$Q(x)=1$

$R(x)=-5x-8$

f) $A(x)=4x^4-5x^3+x^2-x-3$ e $B(x)=3x^2-3x+2$

$$\begin{array}{l|l}
4x^4-5x^3+x^2-x-3 & 3x^2-3x+2 \\ \hline
-4x^4+4x^3-\frac{8}{3}x^2 & \frac{4}{3}x^2-\frac{1}{3}x-\frac{8}{9} \\ \hline
\quad -x^3-\frac{5}{3}x^2-x-3 & \\
\quad x^3-x^2+\frac{2}{3}x & \\ \hline
\end{array}$$

$3a=4$

$a=\frac{4}{3}$

$3a=-1$

$$-x^3 - \frac{3}{3}x^2 - x - 3$$
$$x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x$$
$$-\frac{8}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - 3$$
$$\frac{8}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{16}{9}$$
$$-\frac{9}{3}x - \frac{11}{9}$$

$a = \frac{}{3}$

$3a = -1$
$a = -\frac{1}{3}$

$3a = -\frac{8}{3}$
$a = -\frac{8}{9}$

$Q(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{8}{9}$ $\quad R(x) = -3x - \frac{11}{9}$

g) $A(x) = -\frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{2}x$ e $B(x) = 2x - \frac{1}{3}$

$$-\frac{3}{4}x^3 + 0x^2 + \frac{1}{2}x + 0 \qquad \Big|\, 2x - \frac{1}{3}$$
$$+\frac{3}{4}x^3 - \frac{x^2}{8} \qquad -\frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x + \frac{23}{96}$$
$$0 - \frac{x^2}{8} + \frac{1}{2}x$$
$$+\frac{x^2}{8} - \frac{1}{48}x$$
$$0 + \frac{23}{48}x + 0$$
$$-\frac{23}{48}x + \frac{23}{188}$$
$$\frac{23}{188}$$

C. A.

$\frac{-\frac{3}{4}}{2} = -\frac{3}{8}$

$\frac{-\frac{1}{8}}{2} = -\frac{1}{16}$

$\frac{\frac{23}{48}}{2} = \frac{23}{96}$

$$Q(x) = -\frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x + \frac{23}{96} \qquad R(x) = \frac{23}{188}$$

2. Sabe-se que, ao dividirmos um polinómio $M(x)$ por um polinómio $N(x)$, se obtém quociente $Q(x)$ e resto 2.

Qual é o quociente e o resto da divisão do polinómio $M(x)$ pelo polinómio $2N(x)$?

$$M(x) \quad \Big|\, N(x)$$
$$2 \qquad Q(x)$$

Logo $M(x) = N(x) \times Q(x) + 2$

Assim $M(x) = N(x) \times Q(x) + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow M(x) = 2N(x)\, \frac{1}{2}\, Q(x) + 2$

Portanto
$$M(x) \quad \Big|\, 2N(x)$$
$$2 \qquad \frac{1}{2}Q(x)$$

Conclui-se que o quociente é $\frac{Q(x)}{2}$ e o resto é 2

3. Para cada uma das alíneas seguintes, verifique que o polinómio $A(x)$ é divisível pelo polinómio $B(x)$ e escreve $A(x)$ na forma $B(x)\times Q(x)$.

a) $A(x)=3x^2-5x-2$ e $B(x)=3x+1$

$$
\begin{array}{rrr|l}
3x^2 & -5x & -2 & 3x+1 \\ \cline{4-4}
-3x^2 & -x & & x-2 \\ \cline{1-3}
 & -6x & -2 & \\
 & 6x & +2 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}
$$

$$3x^2-5x-2=(3x+1)(x-2)$$

b) $A(x)=-x^3+3x^2-4x+2$ e $B(x)=x^2-2x+2$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
-x^3 & +3x^2 & -4x & +2 & x^2-2x+2 \\ \cline{5-5}
x^3 & -2x^2 & +2x & & -x+1 \\ \cline{1-4}
 & x^2 & -2x & +2 & \\
 & -x^2 & +2x & -2 & \\ \cline{2-4}
 & & 0 & &
\end{array}
$$

$$-x^3+3x^2-4x+2=(x^2-2x+2)(-x+1)$$

c) $A(x)=2x^4-x^3-4x-3$ e $B(x)=x^2-x-1$

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -x^3 & +0x^2 & -4x & -3 & x^2-x-1 \\ \cline{6-6}
-2x^4 & +2x^3 & +2x^2 & & & 2x^2+x+3 \\ \cline{1-5}
 & x^3 & +2x^2 & -4x & -3 & \\
 & -x^3 & +x^2 & +x & & \\ \cline{2-5}
 & & 3x^2 & -3x & -3 & \\
 & & -3x^2 & +3x & +3 & \\ \cline{3-5}
 & & & 0 & &
\end{array}
$$

$$2x^2-x^3-4x-3=(x^2-x-1)(2x^2+x+3)$$

4.

4.1. Verifique que $(x-1)(x+2)(x-3)=x^3-2x^2-5x+6$

$$
\begin{aligned}
(x-1)(x+2)(x-3) &= (x^2+2x-x-2)(x-3) \\
&= (x^2+x-2)(x-3) \\
&= x^3-3x^2+x^2-3x-2x+6 \\
&= x^3-2x^2-5x+6 \quad \text{c.q.m.}
\end{aligned}
$$

4.2. Se dividíssemos o polinómio x^3-2x^2-5x+6 por $x+2$, qual seria o quociente? E qual seria o resto?

O quociente seria $(x-1)(x-3)=x^2-3x-x+3$
$=x^2-4x+3$

O resto seria 0

5. Utilize a regra de Ruffini para, em cada uma das alíneas seguintes, efetuar a divisão inteira do polinómio $A(x)$ pelo polinómio $B(x)$. Para cada caso, indique o quociente e o resto.

a) $A(x)=2x^3-5x^2-5x+7$ e $B(x)=x-3$

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -5 & -5 & 7 \\ 3 & & 6 & 3 & -6 \\ \hline & 2 & 1 & -2 & \boxed{1} \end{array}$$

$Q(x)=2x^2+x-2$

$R(x)=1$

b) $A(x)=-3x^3+7x+4$ e $B(x)=x+1$

$$\begin{array}{c|cccc} & -3 & 0 & 7 & 4 \\ -1 & & 3 & -3 & -4 \\ \hline & -3 & 3 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

$Q(x)=-3x^2+3x+4$

$R(x)=0$

c) $A(x)=-4x^4+10x^2+25$ e $B(x)=x+2$

$$\begin{array}{c|ccccc} & -4 & 0 & 10 & 0 & 25 \\ -2 & & 8 & -16 & 12 & -24 \\ \hline & -4 & 8 & -6 & 12 & \boxed{1} \end{array}$$

$Q(x)=-4x^3+8x^2-6x+12$

$R(x)=1$

d) $A(x)=x^5+1$ e $B(x)=x-1$

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{2} \end{array}$$

$Q(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ $\quad R(x)=2$

e) $A(x)=x^3-3x^2+10$ e $B(x)=3x-6$

$B(x)=3x-6=3(x-2)$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 0 & 10 \\ 2 & & 2 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & \boxed{6} \end{array}$$

$3\,Q(x)=x^2-x-2 \Leftrightarrow Q(x)=\frac{x^2}{3}-\frac{x}{3}-\frac{2}{3}$

$R(x)=6$

f) $A(x)=x^4-2x^2+x-1$ e $B(x)=4x-2$

$B(x)=4x-2=4\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}$$

	1	0	-2	1	-1
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{8}$	$\frac{1}{16}$
	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{4}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{15}{16}$

$$4Q(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{1}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Q(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{7}{16}x + \frac{1}{32}$$

$$R(x) = -\frac{15}{16}$$

6. Utilize o Teorema do Resto para, em cada uma das alíneas seguintes, determinar o resto da divisão inteira do polinómio $A(x)$ pelo polinómio $B(x)$.

a) $A(x) = -x^3 - 10x + 4$ e $B(x) = x - 3$

$$\text{Resto} = A(3) = -3^3 - 10 \times 3 + 4 = -27 - 30 + 4 = -53$$

b) $A(x) = x^5 - 5x^3 - 2x^2 + 10x$ e $B(x) = x + 2$

$$\text{Resto} = A(-2) = (-2)^5 - 5(-2)^3 - 2(-2)^2 + 10(-2)$$

$$= -32 + 40 - 8 - 20 = -20$$

c) $A(x) = -4x^7 + 8x^5 - 5x^4 + 3x + 9$ e $B(x) = x - 1$

$$\text{Resto} = A(1) = -4 + 8 - 5 + 3 + 9 = 11$$

7. Para certos números reais a e b, os restos da divisão de $x^3 + 3x^2 + ax + b$ por $x - 1$ e $x - 2$ são 6 e 25, respetivamente. Determine a e b.

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b$$

$$P(1) = 6 \Leftrightarrow 1 + 3 + a + b = 6 \Leftrightarrow a + b = 2$$

$$P(2) = 25 \Leftrightarrow 8 + 12 + 2a + b = 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a + b = 5$$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - a \\ 2a + 2 - a = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 - 3 \\ a = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 3 \end{cases}$$

8. Verifique que $-3, 0$ e 2 são raízes do polinómio $x^3 + x^2 - 6x$.

$$P(-3) = (-3)^3 + (-3)^2 - 6(-3) = -27 + 9 + 18 = 0$$

9. Identifique quais dos elementos do conjunto $\{-2,-1,1,2,3\}$ são raízes do polinómio x^3-3x^2-x+3 .

$P(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - (-2) + 3 = -8 - 12 + 4 + 3 = -15$

Logo, -2 não é raiz

$P(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - (-1) + 3 = -1 - 3 + 1 + 3 = 0$

Logo -1 é raiz

$P(1) = 1 - 3(1)^2 - (1) + 3 = 1 - 3 - 1 + 3 = 0$

logo 1 é raiz

$P(2) = 2^3 - 3(2)^2 - 2 + 3 = 8 - 12 - 2 + 3 = -3$

Logo 2 não é raiz

$P(3) = 3^3 - 3(3)^2 - 3 + 3 = 27 - 27 - 3 + 3 = 0$

logo 3 é raiz

10. Verifique que -1 é uma raiz do polinómio $2x^4-3x-5$ e utilize esse facto para escrever $2x^4-3x-5$ como produto de um polinómio do primeiro grau por um do terceiro grau.

$P(-1) = 2(-1)^4 - 3(-1) - 5 = 2 + 3 - 5 = 0$

	2	0	0	−3	−5
−1		−2	2	−2	5
	2	−2	2	−5	0

$2x^4 - 3x - 5 = (2x^2 - 2x^2 + 2x - 5)(x+1)$

11. Sabe-se que $A(x)$ e $B(x)$ são dois polinómios tais que $A(x)=(x+5)(x-2)B(x)$.
Indique duas raízes de $A(x)$.

$A(x) = (x+5)(x-2)B(x)$ então $A(x)$ é divisível por $x+5$ e por $x-2$, pelo que -5 e 2 são raízes de $A(x)$

12. Sabe-se que a e b são duas raízes distintas de um polinómio $P(x)$. Seja $Q(x)$ o quociente da divisão de $P(x)$ por $x-a$.
Justifique que b é uma raiz de $Q(x)$.

Como $Q(x)$ é o quociente da divisão de $P(x)$ por $x-a$ então

$$P(x) = (x-a)\,Q(x)$$

Sabe-se que a e b são duas raízes

de $P(x)$ então $P(x) = (x-a)(x-b)S(x)$

Assim

$\cancel{(x-a)}Q(x) = \cancel{(x-a)}(x-b)S(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Q(x) = (x-b)S(x)$

logo b é uma raiz de $Q(x)$

//

Tem-se $P(x) = (x-a)Q(x)$

Como b é uma raiz de $P(x)$ então

$P(b) = (b-a)Q(b) \Leftrightarrow$

$0 = (b-a)Q(b) \Leftrightarrow Q(b) = 0$

Portanto b é raiz de $P(x)$

13. Seja $P(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$.

Determine as raízes de $P(x)$, sabendo que são números inteiros.

Num polinómio de coeficientes inteiros, o seu termo independente é múltiplo inteiro de qualquer raiz inteira desse polinómio

18 é o termo independente de $P(x)$, então $-18, -9, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 9, 18$ são candidatos a raízes de $P(x)$

(1) $P(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 - 9 \times 1 + 18 = 8$, 1 não é raiz de $P(x)$

(2) $P(2) = 2^3 - 2 \times 2^2 - 9 \times 2 + 18 = 0$, 2 é raiz de $P(x)$

Aplicando a Regra de Ruffini a $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$ por $x - 2$

	1	−2	−9	18
2		2	0	−18
	1	0	−9	0

então $P(x) = (x-2)(x^2-9) =$

$= (x-2)(x-3)(x+3)$

Logo as raízes de $P(x)$ são $-3; 2; 3$

14. Seja $P(x)$ um polinómio de coeficientes inteiros cujo termo independente é um número natural inferior a 20. Sabe-se que 8 é uma raiz de $P(x)$.

Indique os possíveis valores do termo independente de $P(x)$.

Num polinómio de coeficientes inteiros, o seu termo independente é múltiplo inteiro de qualquer raiz inteira desse polinómio.

Assim, o termo independente é múltiplo inteiro de 8, como tem que ser inferior a 20 só pode ser 8 ou 16.

15. Mostra que -3 é uma raiz simples do polinómio $4x^3 + 12x^2 - x - 3$.

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 4 & 12 & -1 & -3 \\
-3 & & -12 & 0 & 3 \\
\hline
 & 4 & 0 & -1 & \boxed{0} \\
-3 & & -12 & 36 & \\
\hline
 & 4 & -12 & \boxed{35} &
\end{array}
$$

Tem-se que $4x^3+12x^2-x-3=(x+3)(4x^2-1)$

Com -3 não é raiz de $4x^2-1$ tem-se que -3 é uma raiz simples do polinómio.

16. Verifica que 1 é uma raiz do polinómio $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x - 3$ e determine a sua multiplicidade.

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & -3 & -3 & 7 & -3 \\
1 & & 2 & -1 & -4 & 3 \\
\hline
 & 2 & -1 & -4 & 3 & \boxed{0} \\
1 & & 2 & 1 & -3 & \\
\hline
 & 2 & 1 & -3 & \boxed{0} & \\
1 & & 2 & 3 & & \\
\hline
 & 2 & 3 & \boxed{0} & & \\
1 & & 2 & & & \\
\hline
 & 2 & \boxed{5} & & &
\end{array}
$$

Logo 1 é uma raiz de multiplicidade 3 do polinómio

$2x^4-3x^3-3x^2+7x-3=(x-1)^3(2x+3)$

17. Determina, utilizando o Teorema do Resto, o resto da divisão de $A(x)=x^4-3x^3+2x-3$ por $B(x)=x+1$.

$A(-1)=(-1)^4-3(-1)^3+2(-1)-3=1+3-2-3$

$=-1$

O resto é -1

18. Utilizando o Teorema do Resto, mostra que:

a) $\forall n\in IN, -1$ é raiz do polinómio $A(x)=x^{n+3}+x^{n+2}+x^{n+1}+x^n$

$A(-1)=(-1)^{n+3}+(-1)^{n+2}+(-1)^{n+1}+(-1)^n$

$=(-1)^n(-1)+(-1)^n(1)+(-1)^n(-1)+(-1)^n$

$=-(-1)^n+(-1)^n-(-1)^n+(-1)^n=0$

logo -1 é raiz de $A(x)$

b) $\forall n\in IN, -1$ não é raiz do polinómio $A(x)=3x^{n+3}+2x^{n+2}+3x^{n+1}+2x^n$

$A(-1)=3(-1)^{n+3}+2(-1)^{n+2}+3(-1)^{n+1}+2(-1)^n$

$=-3(-1)^n+2(-1)^n-3(-1)^n+2(-1)^n=$

$=-2(-1)^n\neq 0$ logo -1 não é raiz de $A(x)$

c) $\exists n\in IN: -1$ é raiz do polinómio $A(x)=x^{4n}-x^{3n}+x^{2n}-x^n$

$A(x)=x^n(x^{3n}-x^{2n}+x^n-1)$

$n=2$ $(-1)^2(1-1+1-1)=0$

d) $\exists n\in IN: -1$ é raiz do polinómio $A(x)=x^{1+4n}-x^{1+3n}+x^{1+2n}-x$

$A(x)=x(x^{4n}-x^{3n}+x^{2n}-1)$

$n=2$ $x(x^4-x^3+x^2-1)$

$(-1)((-1)^8-(-1)^6+(-1)^4-1)$

$1 \quad -1 \quad +1 \quad -1$

19. Seja $n \in IN$

Prove que:

a) $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$

$P(x) = x^n - 1$

$P(1) = 1^n - 1 = 0 \ , \ \forall n \in IN$

logo $x^n - 1$ é divisível por $x - 1$

b) $x^n + x$ é divisível por $x + 1$ se n é par

$P(x) = x^n + x = x(x^{n-1} + 1)$

$P(-1) = (-1)((-1)^{n-1} + 1)$

se n é par então n-1 é
impar logo

$(-1)(-1+1) = (-1) \times 0 = 0$

20. Decompõe em fatores cada um dos seguintes polinómios.

a) $70x^2 + 35x$

$70x^2 + 35x = x(70x + 35) =$

$= 70x\left(x + \frac{1}{2}\right)$

b) $100 - x^2$

$100 - x^2 = (10 - x)(10 + x)$

c) $x^2 + 10x + 25$

$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$

d) $9x^2 + 6x + 1$

$$9x^2+6x+1 = 9\left(x^2+\frac{6}{9}x+\frac{1}{9}\right)$$
$$= 9\left(x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)$$
$$= 9\left(x+\frac{1}{3}\right)^2$$

e) $x - x^3$

$$x - x^3 = x(1-x^2) = x(1-x)(1+x)$$

f) $x^6 - 25x^4$

$$x^6 - 25x^4 = x^4(x^2-25) = x^4(x-5)(x+5)$$

21. Decompõe em fatores cada um dos seguintes polinómios.

a) $x^2 + x - 12$

$$x^2+x-12 =$$
$$= (x-3)(x+4)$$

C. A.

$$x^2+x-12=0$$
$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}$$
$$x=\frac{-1\pm 7}{2} \begin{cases} \frac{-8}{2}=-4 \\ \frac{6}{2}=3 \end{cases}$$

b) $-5x^2 - 10x + 15$

$$-5x^2-10x+15=-5(x^2-2x+3)=$$
$$=-5(x-3)(x+1)$$

C. A.

$$x^2+2x-3=0$$
$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}$$
$$x=\frac{2\pm 4}{2} \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

c) $2x^2 - 5x + 2$

$2x^2 - 5x + 2 =$

$= 2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

C. A.

$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4}$

$x = \frac{5 \pm 3}{4}$ $\begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

22. Decompõe em fatores cada um dos seguintes polinómios.

a) $A(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, sabendo que 1 é raiz de $A(x)$

Regra de Ruffini

	1	−6	11	−6
1		1	−5	6
	1	−5	6	0

$(x-1)(x^2-5x+6)$

$(x-1)(x-3)(x-2)$

C. A.

$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2}$

$x = \frac{5 \pm 1}{2}$ $\begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

b) $B(x) = x^3 - 8x^2 + 5x + 50$, sabendo que -2 é raiz $B(x)$

	1	−8	5	50
−2		−2	20	−50
	1	−10	25	0

$(x+2)(x^2-10x+25)$

$(x+2)(x-5)^2$

C. A.

$x = \frac{10 \pm \sqrt{100-100}}{2}$

$\Leftrightarrow x = 5$

c) $C(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 12$, sabendo que 2 é raiz de $B(x)$

	2	−3	4	−12
2		4	2	12
	2	1	6	$\boxed{0}$

$(x-2)(2x^2+x+6)$

$2(x-2)(x+2)(x-\frac{3}{2})$

C.A.

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{4}$

$x=\frac{-1\pm 7}{4}$ $\begin{cases} \frac{-8}{4}=-2 \\ \frac{6}{4}=\frac{3}{2} \end{cases}$

d) $D(x)=3x^3+6x^2-21x+12$, sabendo que 1 é raiz de $D(x)$

	3	6	−21	12
1		3	9	−12
	3	9	−12	$\boxed{0}$

$3(x-1)(x^2+3x-4)=$

$=3(x-1)(x-1)(x+4)$

$=3(x-1)^2(x+4)$

C.A.

$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}$

$x=\frac{-3\pm 5}{2}$ $\begin{cases} -4 \\ 1 \end{cases}$

e) $E(x)=x^4+x^3-19x^2+11x+30$, sabendo que -1 e 3 são raízes de $E(x)$

	1	1	−19	11	30
−1		−1	0	19	−30
	1	0	−19	30	$\boxed{0}$
3		3	9	−30	
	1	3	−10	$\boxed{0}$	

$(x+1)(x-3)(x^2-3x-10)$

$(x+1)(x-3)(x-5)(x+2)$

C. A.

$x=\dfrac{3\pm\sqrt{9+40}}{2}$

$x=\dfrac{3\pm7}{2}$ ⟨ 5, -2

f) $F(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$, sabendo que 2 é raiz dupla de $F(x)$

	1	−4	3	4	−4
2		2	−4	−2	4
	1	−2	−1	2	$\lfloor 0$
2		2	0	−2	
	1	0	−1	$\lfloor 0$	

$(x-2)^2(x^2-1) =$

$= (x-2)^2(x-1)(x+1)$

23. Para certos números reais a e b, $ax^3 + bx^2 - 7x + 6$ é divisível por $x^2 + x - 6$. Determina a e b.

$x^2+x-6=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm5}{2}$ ⟨ -3, 2

$\Leftrightarrow x=-3 \vee x=2$

Então -3 e 2 são raízes do polinómio

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & -7 & 6 \\ -3 & & -3a & 9a-3b & -27a+9b+21 \\ \hline & a & -3a+b & 9a-3b-7 & \boxed{-27a+9b+27} \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & a & b & -7 & 6 \\ 2 & & 2a & 4a+2b & 8a+4b-14 \\ \hline & a & 2a+b & 4a+2b-7 & \boxed{8a+4b-8} \end{array}$$

$$\begin{cases} -27a+9b+27=0 \\ 8a+4b-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a+b+3=0 & :9 \\ 2a+b-2=0 & :4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=3a-3 \\ 2a+3a-3-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3-3 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=1 \end{cases}$$

24. Considera o polinómio $P(x)=x^3-2x^2+mx+n$, $(m,n\in IR)$

Determina os valores de m e n sabendo que:

- $P(x)$ é divisível por $x+3$
- o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x-1$ é 28 .

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & m & n \\ -3 & & -3 & 15 & -3m-45 \\ \hline & 1 & -5 & m+15 & \boxed{-3m-45+n} \end{array} = 0$$

	1	-2	m	n
1		1	-1	$m-1$
	1	-1	$m-1$	$\boxed{m-1+n=28}$

$$\begin{cases} m-1+n=28 \\ -3m-45+n=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=29-m \\ -3m-45+29-m=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n=33 \\ m=-4 \end{cases}$$

25. Seja a_1, a_2, a_3 e a_4 números inteiros.

Considere o polinómio $P(x) = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$.

a) Se o polinómio $P(x)$ tiver quatro raízes inteiras, justifique que o seu produto é igual a a_4

Sejam a, b, c e d as quatro raízes inteiras, então

$$P(x)=(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

Temos que

$$P(0)=(-a)(-b)(-c)(-d) \quad (1)$$

Como a, b, c e d são divisores de a_4 e (1) tem-se que

$d_4 = abcd$

b) Justifique que, se a_4 for um número primo, então o polinómio $P(x)$ não pode ter quatro raízes inteiras distintas.

Por a) o produto das 4 raízes é d_4.

Se d_4 for um número primo, não existem 4 números inteiros distintos cujo produto é d_4.

Portanto, $P(x)$, não pode ter 4 raízes inteiras distintas.

Exemplo:

Seja $d_4 = 2$ então

$-2, -1, 1$ e 2 são divisores de 2 e $(-2)\times(-1)\times(1)\times(2) =$

$= 4 \neq 2$

26. Seja $P(x)$ um polinómio de grau n $(n > 2)$. Sabe-se que a é uma raiz de multiplicidade m de $P(x)$, com m número natural par. Seja $Q(x)$ o quociente da divisão de $P(x)$ por $(x-a)^m$. Determina, em função de a, duas raízes do polinómio $P(x) - Q(x)$.

a é uma raiz de multiplicidade m e $q(x)$ é o quociente de $P(x)$ por

$(x-a)^m$

e $q(x)$ é o quociente de $f(x)$ por $(x-a)^m$.

Então $P(x) = Q(x)(x-a)^m$, m é par

Seja b uma raiz de $P(x) - Q(x)$

Então

$$P(x) - Q(x) = 0 \Leftrightarrow P(b) - Q(b) = 0$$
$$\Leftrightarrow (b-a)^m \times Q(b) - Q(b) = 0$$
$$\Leftrightarrow Q(b)\left((b-a)^m - 1\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow Q(b) = 0 \vee (b-a)^m - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow Q(b) = 0 \vee (b-a)^m = 1$$

como m é par

$$Q(b) = 0 \quad \vee \quad b - a = \pm\sqrt[m]{1}$$

$$Q(b) = 0 \quad \vee \quad b - a = -1 \vee b - a = 1$$

assim, $a-1$ e $a+1$ são duas raízes de $P(x) - Q(x)$

27. Considera a equação:

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

27.1. Tendo em conta que $x^4 = (x^2)^2$, substitui na equação x^2 por y e resolve a equação do 2.º grau assim obtida.

Seja $x^2 = y$ então

$$y^2 - 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

$$y = -1 \lor y = 4$$

27.2. Determina os valores de x que satisfazem a equação dada.

Como $y = x^2$

$$\underbrace{x^2 = -1}_{\text{Impossível em } \mathbb{R}} \lor x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \lor x = 2$$

28. Resolve a equação seguinte, usando dois processos distintos:

$$2x^4 - 10x^2 + 8 = 0$$

1º Processo

Seja $x^2 = y$ então

$$2y^2 - 10y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{10 \pm \sqrt{100-64}}{4}$$

4

$2y^2 - 10y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\ldots}{4}$

$\Leftrightarrow y = \frac{10 \pm 6}{4} \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$

$y = 1 \quad \vee \quad y = 4$

Como $y = x^2$ então

$x^2 = 1 \quad \vee \quad x^2 = 4$

$x = \pm 1 \quad \vee \quad x = \pm 2$

$C.S = \{-2, -1, 1, 2\}$

2º Processo

Divisores de 8: $-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & 0 & -10 & 0 & 8 \\
1 & & 2 & 2 & -8 & -8 \\
\hline
 & 2 & 2 & -8 & -8 & \boxed{0} \\
-1 & & -2 & 0 & 8 & \\
\hline
 & 2 & 0 & -8 & \boxed{0} & \\
2 & & 4 & 8 & & \\
\hline
 & 2 & 4 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

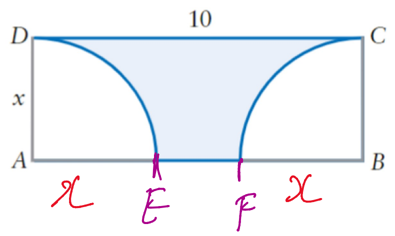
$(x-1)(x+1)(x-2)(2x+4) = 0$

$x = 1 \quad \vee \quad x = -1 \quad \vee \quad x = 2 \quad \vee \quad x = -2$

$$C.S. = \{-2, -1, 1, 2\}$$

29. Na figura ao lado estão representados:

- um retângulo de comprimento 10 e largura x $(0 < x < 5)$;
- dois quartos de círculo de raio x e cujos centros são os pontos A e B.



O perímetro da região colorida é dado por um polinómio $P(x)$.

Determina $P(x)$ na forma reduzida.

$$P(x) = \overline{DC} + \overline{EF} + \text{comprimento arco } DE + \text{comprimento arco } FC$$

$$\overline{DC} = 10$$

$$\overline{EF} = 10 - 2x$$

$$\text{Comprimento arco } DE = \frac{2\pi \times r}{4} = \text{comprimento arco } FC$$

$$r = x$$

$$\text{Logo comprimento arco } DE = \frac{2\pi x}{4} = \frac{\pi x}{2}$$

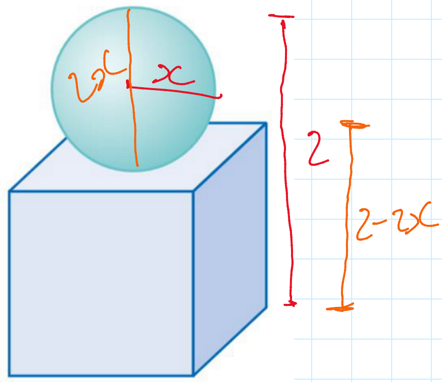
$$\text{Então } P(x) = 10 + 10 - 2x + 2 \times \frac{\pi x}{2}$$

$$= 20 - 2x + \pi x =$$

$$= 20 - x(2 - \pi)$$

30. Na figura ao lado está representado um projeto de uma escultura para o jardim de uma escola, constituída por uma esfera colocada sobre um cubo. Pretende-se que a escultura tenha uma altura total de 2 metros.

Seja x o raio da esfera, em metros $(0 < x < 1)$. Mostra que o volume total, em metros cúbicos, da escultura é dado por $P(x) = \frac{4\pi - 24}{3} x^3 + 24x^2 - 24x + 8$.



$$V_{esf} = \frac{4}{3}\pi x^3$$

$$V_{cubo} = (2-2x)^3$$

$$V_{esf} + V_{cubo} = \frac{4}{3}\pi x^3 + (2-2x)^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi x^3 + (4 - 8x + 4x^2)(2-2x)$$

$$= \frac{4}{3}\pi x^3 + 8 - 8x - 16x + 16x^2 + 8x^2 - 8x^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi x^3 - 8x^3 + 24x^2 - 24x + 8$$

$$= \frac{4\pi - 24}{3} x^3 + 24x^2 - 24x + 8$$

c. q. m.

31. Uma pirâmide quadrangular tem altura 8 e a aresta da base é $6\sqrt{2}$.

Fez-se um corte por um plano paralelo à base, tendo a pirâmide ficado decomposta num tronco de pirâmide de altura x e numa nova pirâmide.

a) Prova que o volume desta nova pirâmide é dado por $P(x) - \frac{3}{8} x^3 + 9x^2 - 72x + 192$.

$$V = \frac{1}{3} A_b \times h$$

$$A_b = \left(6\sqrt{2}\right)^2 = 36 \times 2 = 72$$

$$V = \frac{1}{3} \times 72 \times 8 = 192$$

A altura da nova pirâmide é $8-x$, sendo que a nova pirâmide é semelhante à inicial logo a razão das alturas é $\frac{8-x}{8}$, Portanto a razão dos volumes é $\left(\frac{8-x}{8}\right)^3$

Assim

$$\left(\frac{8-x}{8}\right)^3 = \frac{(8-x)(64-16x+x^2)}{512}$$

$$= \frac{512-192x+24x^2-x^3}{512}$$

Portanto

$$V = \left(\frac{512-192x+24x^2-x^3}{\ldots}\right) \times 192$$

$$V = \left(\frac{512 - 192x + 24x^2 - x^3}{512}\right) \times 192$$

$$= \frac{192}{512}\left(-x^3 + 24x^2 - 192x + 512\right)$$

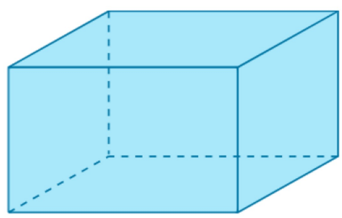
$$= \frac{3}{8}\left(-x^3 + 24x^2 - 192x + 512\right)$$

$$= -\frac{3}{8}x^3 + 9x^2 - 72x + 192$$

b) Sem efetuar cálculos, justifica que o volume da pirâmide inicial é o termo independente de $P(x)$.

Se o tronco da pirâmide tiver altura zero, a sua pirâmide coincide com a inicial. Portanto o volume da pirâmide inicial é igual a $P(0)$, logo o volume da pirâmide inicial coincide com o termo independente de $P(x)$

32. Pretende-se construir uma caixa com a forma de um paralelepípedo de base quadrada tal que a soma do perímetro da base com a sua altura seja 24 cm.



32.1. Mostra que o volume da caixa pode ser expresso, para certos valores de x, pelo polinómio $v(x) = 24x^2 - 4x^3$, em que x é a aresta da base.

Seja x o comprimento da aresta e h a altura.

Então $4x+h=24 \Leftrightarrow h=24-4x$

$$V = x^2(24-4x) = 24x^2-4x^3 \text{ c.q.m.}$$

32.2. Calcula o valor numérico de $v(x)$ para $x=5$ e para $x=7$

Qual dos valores não faz sentido neste contexto? Justifica.

$$V(5) = 24(5)^2 - 4(5)^3 = 100$$

$$V(7) = 24(7)^2 - 4(7)^3 = -196$$

Logo a aresta não pode ser 7 porque não existem volumes negativos

32.3. Determina os valores de x para os quais o polinómio $v(x)$ pode representar o volume da caixa.

$$x>0 \wedge 24-4x>0$$

$$x > 0 \quad \wedge \quad -4x > -24$$

$$x > 0 \quad \wedge \quad x < 6$$

$$x \in \,]0, 6[$$