1. Efetue, em cada uma das alíneas seguintes, a divisão inteira do polinómio $A(x)$ pelo polinómio $B(x)$, apresentando o quociente e o resto.

a) $A(x)=x^3+3x^2-x-5$ e $B(x)=x^2+2x-3$

b) $A(x)=4x^3+4x^2-6$ e $B(x)=x-3$

c) $A(x)=8x^4-10x^2+2$ e $B(x)=4x^3+4x^2-x-1$

d) $A(x)=2x^3+3x^2+x$ e $B(x)=6x^3+9x^2-18$

e) $A(x)=x^2+4x-8$ e $B(x)=x^2+9x\ 0$

f) $A(x)=4x^4-5x^3+x^2-x-3$ e $B(x)=3x^2-3x+2$

g) $A(x)=-\frac{3}{4}x^3+\frac{1}{2}x$ e $B(x)=2x-\frac{1}{3}$

2. Sabe-se que, ao dividirmos um polinómio $M(x)$ por um polinómio $N(x)$, se obtém quociente $Q(x)$ e resto 2.

Qual é o quociente e o resto da divisão do polinómio $M(x)$ pelo polinómio $2N(x)$?

3. Para cada uma das alíneas seguintes, verifique que o polinómio $A(x)$ é divisível pelo polinómio $B(x)$ e escreve $A(x)$ na forma $B(x)\times Q(x)$.

a) $A(x)=3x^2-5x-2$ e $B(x)=3x+1$

b) $A(x)=-x^3+3x^2-4x+2$ e $B(x)=x^2-2x+2$

c) $A(x)=2x^4-x^3-4x-3$ e $B(x)=x^2-x-1$

4.

4.1. Verifique que $(x-1)(x+2)(x-3)=x^3-2x^2-5x+6$

4.2. Se dividíssemos o polinómio x^3-2x^2-5x+6 por $x+2$, qual seria o quociente?

E qual seria o resto?

5. Utilize a regra de Ruffini para, em cada uma das alíneas seguintes, efetuar a divisão inteira do polinómio $A(x)$ pelo polinómio $B(x)$. Para cada caso, indique o quociente e o resto.

a) $A(x)=2x^3-5x^2-5x+7$ e $B(x)=x-3$

b) $A(x)=-3x^3+7x+4$ e $B(x)=x+1$

c) $A(x)=-4x^4+10x^2+25$ e $B(x)=x+2$

d) $A(x)=x^5+1$ e $B(x)=x-1$

e) $A(x)=x^3-3x^2+10$ e $B(x)=3x-6$

f) $A(x)=x^4-2x^2+x-1$ e $B(x)=4x-2$

6. Utilize o Teorema do Resto para, em cada uma das alíneas seguintes, determinar o resto da divisão inteira do polinómio $A(x)$ pelo polinómio $B(x)$.

a) $A(x)=-x^3-10x+4$ e $B(x)=x-3$

b) $A(x)=x^5-5x^3-2x^2+10x$ e $B(x)=x+2$

c) $A(x)=-4x^7+8x^5-5x^4+3x+9$ e $B(x)=x-1$

7. Para certos números reais a e b, os restos da divisão de x^3+3x^2+ax+b por $x-1$ e $x-2$ são 6 e 25 , respetivamente. Determine a e b.

8. Verifique que $-3, 0$ e 2 são raízes do polinómio x^3+x^2-6x.

9. Identifique quais dos elementos do conjunto $\{-2,-1,1,2,3\}$ são raízes do polinómio x^3-3x^2-x+3

10. Verifique que -1 é uma raiz do polinómio $2x^4-3x-5$ e utilize esse facto para escrever $2x^4-3x-5$ como produto de um polinómio do primeiro grau por um do terceiro grau.

11. Sabe-se que $A(x)$ e $B(x)$ são dois polinómios tais que $A(x)=(x+5)(x-2)B(x)$.

Indique duas raízes de $A(x)$.

12. Sabe-se que a e b são duas raízes distintas de um polinómio $P(x)$. Seja $Q(x)$ o quociente da divisão de $P(x)$ por $x-a$.

Justifique que b é uma raiz de $Q(x)$.

13. Seja $P(x)=x^3-2x^2-9x+18$.

Determine as raízes de $P(x)$, sabendo que são números inteiros.

14. Seja $P(x)$ um polinómio de coeficientes inteiros cujo termo independente é um número natural inferior a 20. Sabe-se que 8 é uma raiz de $P(x)$.

Indique os possíveis valores do termo independente de $P(x)$.

15. Mostra que -3 é uma raiz simples do polinómio $4x^3+12x^2-x-3$.

16. Verifica que 1 é uma raiz do polinómio $2x^4-3x^3-3x^2+7x-3$ e determine a sua multiplicidade.

17. Determina, utilizando o Teorema do Resto, o resto da divisão de $A(x)=x^4-3x^3+2x-3$ por $B(x)=x+1$.

18. Utilizando o Teorema do Resto, mostra que:

a) $\forall n \in IN, -1$ é raiz do polinómio $A(x)=x^{n+3}+x^{n+2}+x^{n+1}+x^n$

b) $\forall n \in IN, -1$ não é raiz do polinómio $A(x)=3x^{n+3}+2x^{n+2}+3x^{n+1}+2x^n$

c) $\exists n \in IN: -1$ é raiz do polinómio $A(x)=x^{4n}-x^{3n}+x^{2n}+x^n$

d) $\exists n \in IN: -1$ é raiz do polinómio $A(x)=x^{1+4n}-x^{1+3n}+x^{1+2n}-x$

19. Seja $n \in IN$

Prove que:

a) x^n-1 é divisível por $x-1$

b) x^n+x é divisível por $x+1$ se n é par

20. Decompõe em fatores cada um dos seguintes polinómios.

a) $70x^2+35x$

b) $100-x^2$

c) $x^2+10x+25$

d) $9x^2+6x+1$

e) $x-x^3$

f) x^6-25x^4

21. Decompõe em fatores cada um dos seguintes polinómios.

a) $x^2 + x - 12$

b) $-5x^2 - 10x + 15$

c) $2x^2 - 5x + 2$

22. Decompõe em fatores cada um dos seguintes polinómios.

a) $A(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, sabendo que 1 é raiz de $A(x)$

b) $B(x) = x^3 - 8x^2 + 5x + 50$, sabendo que -2 é raiz $B(x)$

c) $C(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 12$, sabendo que 2 é raiz de $B(x)$

d) $D(x) = 3x^3 + 6x^2 - 21x + 12$, sabendo que 1 é raiz de $D(x)$

e) $E(x) = x^4 + x^3 - 19x^2 + 11x + 30$, sabendo que -1 e 3 são raízes de $E(x)$

f) $F(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$, sabendo que 2 é raiz dupla de $F(x)$

23. Para certos números reais a e b, $ax^3 + bx^2 - 7x + 6$ é divisível por $x^2 + x - 6$.

Determina a e b.

24. Considera o polinómio $P(x) = x^3 - 2x^2 + mx + n$, $(m, n \in IR)$

Determina os valores de m e n sabendo que:

- $P(x)$ é divisível por $x+3$
- o resto da divisão inteira de $P(x)$ por $x-1$ é 28.

25. Seja a_1, a_2, a_3 e a_4 números inteiros.

Considere o polinómio $P(x) = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$.

a) Se o polinómio $P(x)$ tiver quatro raízes inteiras, justifique que o seu produto é igual a a_4

b) Justifique que, se a_4 for um número primo, então o polinómio $P(x)$ não pode ter quatro raízes inteiras distintas.

26. Seja $P(x)$ um polinómio de grau n $(n > 2)$. Sabe-se que a é uma raiz de multiplicidade m de $P(x)$, com m número natural par. Seja $Q(x)$ o quociente da divisão de $P(x)$ por $(x-a)^m$.

Determina, em função de a, duas raízes do polinómio $P(x) - Q(x)$.

27. Considera a equação:

$$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

27.1. Tendo em conta que $x^4 = (x^2)^2$, substitui na equação x^2 por y e resolve a equação do 2.º grau assim obtida.

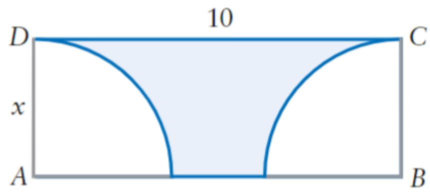
27.2. Determina os valores de x que satisfazem a equação dada.

28. Resolve a equação seguinte, usando dois processos distintos:

$$2x^4 - 10x^2 + 8 = 0$$

29. Na figura ao lado estão representados:

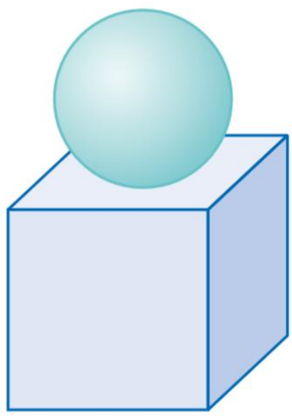
- um retângulo de comprimento 10 e largura x $(0 < x < 5)$;
- dois quartos de círculo de raio x e cujos centros são os pontos A e B.



O perímetro da região colorida é dado por um polinómio $P(x)$.

Determina $P(x)$ na forma reduzida.

30. Na figura ao lado está representado um projeto de uma escultura para o jardim de uma escola, constituída por uma esfera colocada sobre um cubo. Pretende-se que a escultura tenha uma altura total de 2 metros.



Seja x o raio da esfera, em metros $(0 < x < 1)$. Mostra que o volume total, em metros cúbicos, da escultura é dado por $P(x) = \frac{4\pi - 24}{3}x^3 + 24x^2 - 24x + 8$.

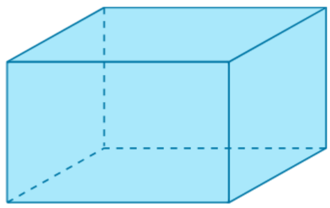
31. Uma pirâmide quadrangular tem altura 8 e a aresta da base é $6\sqrt{2}$.

Fez-se um corte por um plano paralelo à base, tendo a pirâmide ficado decomposta num tronco de pirâmide de altura x e numa nova pirâmide.

a) Prova que o volume desta nova pirâmide é dado por $P(x) = -\frac{3}{8}x^3 + 9x^2 - 72x + 192$.

b) Sem efetuar cálculos, justifica que o volume da pirâmide inicial é o termo independente de $P(x)$

32. Pretende-se construir uma caixa com a forma de um paralelepípedo de base quadrada tal que a soma do perímetro da base com a sua altura seja 24 cm.



32.1. Mostra que o volume da caixa pode ser expresso, para certos valores de x, pelo polinómio $v(x) = 24x^2 - 4x^3$, em que x é a aresta da base.

32.2. Calcula o valor numérico de $v(x)$ para $x = 5$ e para $x = 7$

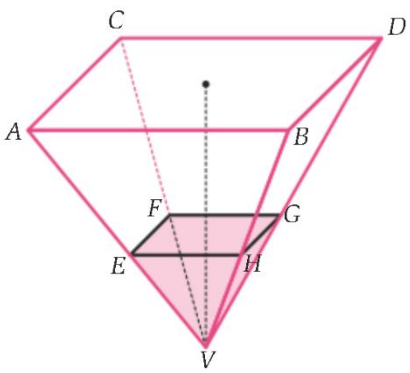
Qual dos valores não faz sentido neste contexto? Justifica.

32.3. Determina os valores de x para os quais o polinómio $v(x)$ pode representar o volume da caixa.

33. Na figura estão representadas duas pirâmides regulares de vértice V e de bases paralelas.

Os vértices E, F, G e H da pirâmide $[EFGHV]$ estão contidos, respetivamente, nas arestas $[VA]$, $[VC]$, $[VD]$ e $[VB]$ da pirâmide $[ABDCV]$.

O volume (V_1) da pirâmide $[ABDCV]$ e a sua altura (h_1) são dados, em m³ e m, pelas expressões



$$V_1 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 \quad \text{e} \quad h_1 = x + 2$$

33.1. Mostra que a aresta da base da pirâmide $[ABDCV]$ tem de comprimento $\sqrt{3}h_1$

33.2. Seja h_2 a altura da pirâmide $[EFGHV]$. Sabendo que $h_2 = \frac{1}{3}h_1$ escreve a expressão que traduz a área do quadrado $[EFGH]$.

33.3. Supondo $x = \left(6\sqrt{3} - 2\right) \times m$, calcula o volume da pirâmide $[EFGHV]$.