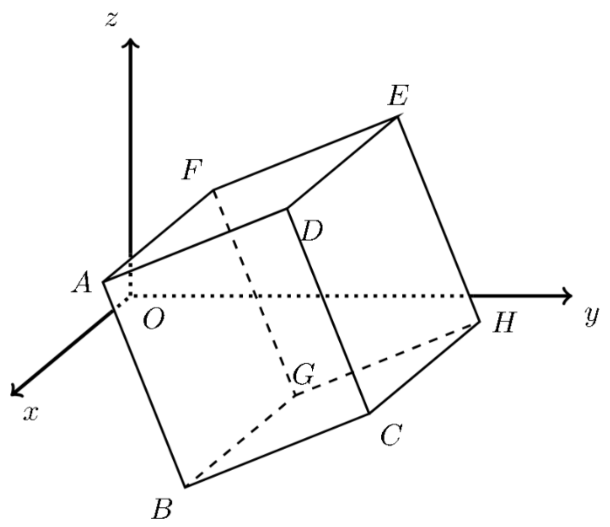
GEOMETRIA ANALÍTICA – EQUAÇÕES DE RETAS E PLANOS
Exercícios de Exames e Testes Intermédios

1. Na figura seguinte, está representado, num referencial o.n. *Oxyz*, o prisma reto de bases quadradas [*ABCDEFGH*]

Sabe-se que:

- a base [*ABCD*] está contido no plano de equação $x=3$;
- o vértice *F* tem coordenadas $(-9,0,2)$;
- o plano *CDE* é definido pela equação $5y+2z-62=0$.



1.1. Em qual das opções seguintes se apresentam as coordenadas de um ponto pertencente à reta *CD* ?

(A) $(3,4,21)$ **(B)** $(3,6,18)$

(C) $(2,4,21)$ **(D)** $(2,6,18)$

Um ponto que pertença à reta CD, tembém pertence ao plano ACD e, [*ABCD*], que é definido pela equação $x=3$ está contido no plano *ACD*, logo, quaquel ponto da reta tem abcissa 3. Opção (A) ou (B).

Temos que *CD* também pertence ao plano *CDE* que é definido pela equação $5y+2z-62=0$

Vamor verificar se **(A)** é opção

$5\times4+2\times21-62=0 \Leftrightarrow 20+42-62=0 \Leftrightarrow 0=0$

OPÇÃO: A

1.2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine o volume do prisma [*ABCDEFGH*].

EF é perepndicular a *CDE*, logo o vetor diretor de *EF* é $\vec{v}(0,5,2)$ e uma equação vetorial de *EF* é

$$(x,y,z)=(-9,0,2)+k(0,5,2)\ ,\ k\in IR$$

Portanto qualquer ponto da reta *EF* é do tipo $(x,y,z)=(-9,5k,2+2k)\ ,\ k\in IR$

O ponto *E* é a interseção da reta *EF* com o plano *CDE*, logo, substituindo as coordenadas, tem-se

$5\times5k+2(2+2k)-62=0 \Leftrightarrow 25+4+4k=62 \Leftrightarrow 29k=58 \Leftrightarrow k=2$

Assim, $E(-9,5\times2,2+2\times2)=(-9,10,6)$

Logo, o comprimento da aresta da base é

$$\overline{EF}=\sqrt{\left(-9-(-9)\right)^2+(10-0)^2+(6-2)^2}=\sqrt{100+16}=\sqrt{116}$$

Como a base $[ABCD]$ está contida no plano de equação $x=3$ e o ponto E tem abcissa -9, então a base $[EFGH]$, que é paralela a $[ABCD]$, está continda no plano de equação $x=-9$, assim a altura do prisma é

$$\overline{AF}=3-(-9)=12$$

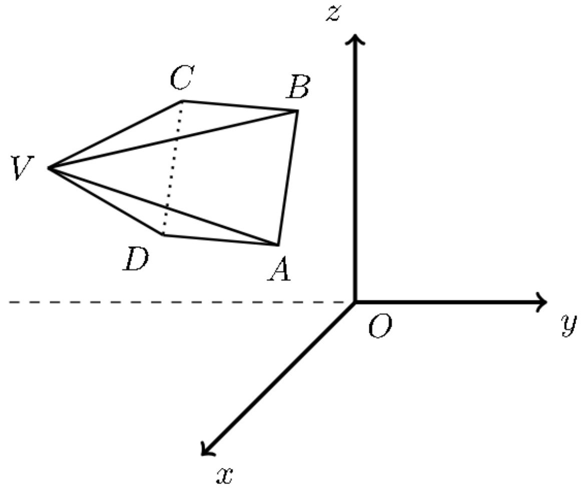
$\therefore\ V_{[ABCDEFGH]}=\overline{EF}^2\times\overline{AF}=\left(\sqrt{116}\right)^2\times12^2=1392$ u.v.

Exame 2025, época especial

2. NA figura, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide regular de base quadrada $[ABCD]$ e vértice V.

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = \sqrt{6}$;
- o centro da base da pirâmide, M, tem coordenadas $(2,-1,3)$;
- o ponto V tem abcissa positiva;
- o plano ABC é definido pela equação $2x - y + z - 8 = 0$;
- o volume da pirâmide é $4\sqrt{6}$.



Resolva este item sem recorre à calculadora.

Determine as coordenadas do ponto V.

Exame 2025, 2.ª fase

$$V_{\text{Pirâmide}} = 4\sqrt{6} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times \overline{AB}^2 \times \underbrace{\left\|\overrightarrow{VM}\right\|}_{\text{Altura pirâmide}} = 4\sqrt{6} \Leftrightarrow \left(\sqrt{6}\right)^2 \left\|\overrightarrow{VM}\right\| = 12\sqrt{6} \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{VM}\right\| = 2\sqrt{6}$$

Sabe-se que $ABC: 2x - y + z - 8 = 0$, então, $\vec{n}(2,-1,1)$, é um vetor normal do plano.

Assim, uma equação vetorial da reta VM é $(x,y,z) = (2,-1,3) + k(2,-1,1)$, $k \in IR$ e qualquer ponto da reta é do tipo $(x,y,z) = (2+2k,-1-k,3+k)$, $k \in IR$

$$\overrightarrow{VM} = M - V = (2,-1,3) - (2+2k,-1-k,3+k) = (-2k,k,-k)$$

$$\left\|\overrightarrow{VM}\right\| = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow \sqrt{(-2k)^2 + k^2 + (-k)^2} = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow 4k^2 + k^2 + k^2 = 24 \Leftrightarrow 6k^2 = 24 \Leftrightarrow k^2 = 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k = \pm 2$$

Para $k = -2$

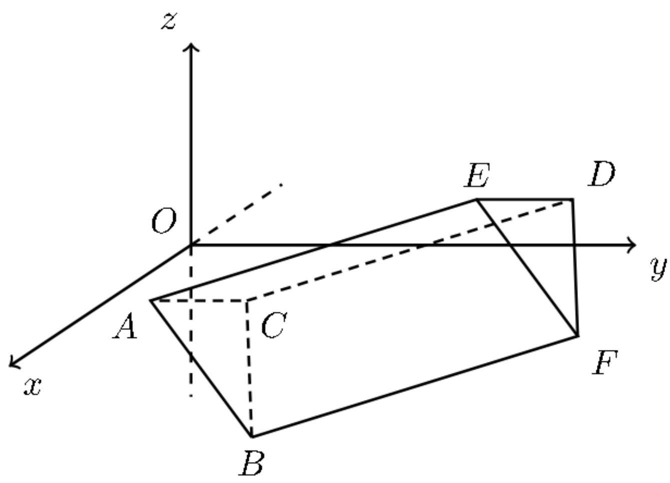
$\left(2 + 2\times(-2)\ ,\ -1-(-2)\ ,\ 3+(-2)\right) = (-2,1,1)$

Para $k = 2$

$\left(2 + 2\times 2\ ,\ -1-2\ ,\ 3+2\right) = (6,-3,5)$

Como a abcissa é positiva, $V(6,-3,5)$

3. Na figura, está reprsentada, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma triangular $[ABCDEF]$.



Sabe-se que:

- os pontos A e B têm coordenadas $(4,2,0)$ e $(2,3,-3)$, respetivamente;
- o ponto C pertence ao plano mediador do segmento de reta $[AB]$;
- a reta DF é definida pela equação vetorial

$$(x,y,z)=(-7,4,2)+k(1,1,-5)\ ,\ k\in IR.$$

3.1. Qual das equações seguintes definde uma reta perpendicular à reta DF e que passa em A?

(A) $(x,y,z)=(-1,2,1)+k(5,0,-1)\ ,\ k\in IR$

(B) $(x,y,z)=(4,-3,-1)+k(0,5,1)\ ,\ k\in IR$

(C) $(x,y,z)=(-6,2,-2)+k(5,0,-1)\ ,\ k\in IR$

(D) $(x,y,z)=(4,8,-2)+k(0,5,1)\ ,\ k\in IR$

Vamos começar por verificar qual é o vetor diretor perpendicular à refa DF.

$(1,1,-5)\cdot(5,0,-1)=5+0+5=10$, logo $(5,0,-1)$ não é perpendicular a DF

$(1,1,-5)\cdot(0,5,1)=0+5-5=0$, logo $(0,5,1)$ é perpendicular a DF

Entre as opções **(B)** e **(D)** vamos averiguar a que passa pelo ponto A.

$$\text{(B)}\ (4,2,0)=(4,-3,-1)+k(0,5,1)\Leftrightarrow\begin{cases}4=4\\2=-3+5k\\0=-1+k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4=4\\5=5k\\1=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4=4\\k=1\\k=1\end{cases}$$

OPÇÃO: B

3.2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine as coordenadas do ponto C.

O plano mediador de $[AB]$ é:

Ponto médio de $[AB]$: $\left(\frac{4+2}{2},\frac{2+3}{2},\frac{0-3}{2}\right)=\left(3,\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right)$

Vetor normal ao plano mediador: $\overrightarrow{AB}=B-A=(2,3,-3)-(4,2,0)=(-2,1,-3)$

Assim, o plano mediador é do tipo: $-2x+y-3z+d=0$
Como o ponto médio pertence ao plano mediador, temos que,

$-2\times 3+\frac{5}{2}-3\times\left(-\frac{3}{2}\right)+d=0 \Leftrightarrow d=-1$

Logo, a equação do plano mediador é, $-2x+y-3z-1=0$

Assim, como a interseção da reta BC com o plano mediador de $[AB]$, temos que:

A reta BC é paralela a DF, ou seja, $(1,1,-5)$ é um vetor diretor de BC

Assim, $BC:(x,y,z)=(2,3,-3)+k(1,1,-5),\ k\in IR$

Então, qualquer ponto da reta BC é do tipo $(x,y,z)=(2+k,3+k,-3-5k)$

Substituíndo no plano mediador, temos:
$-2(2+k)+3+k-3(-3-5k)-1=0 \Leftrightarrow -4-2k+3+k+9+15k-1=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 14k=-7 \Leftrightarrow k=-\frac{1}{2}$

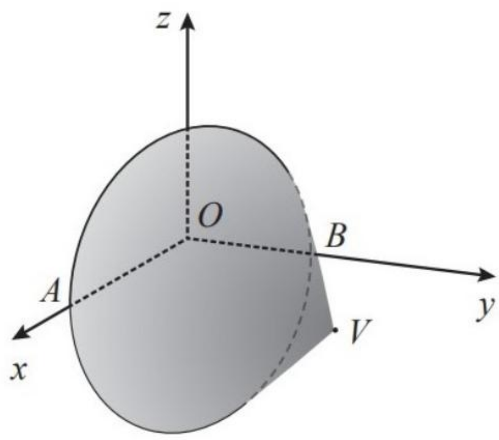
Portanto as coordenadas do ponto C são, $\left(2-\frac{1}{2},3-\frac{1}{2},-3-5\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)$

Exame 2025, 1.ª fase

4. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cone reto de vértice V

Sabe-se que:

- a base do cone interseta o semieixo positivo Ox no ponto A e o semieixo positivo Oy no ponto B;
- o segmento de reta $[AB]$ é um diâmetro da base do cone;
- a base do cone está contida no plano definido pela equação $x+2y-8=0$;
- a abcissa do ponto V tem menos uma unidade do que a sua ordenada.



4.1. Qual das seguintes equações define um plano paralelo que contém a base do cone e que passa no ponto de coordenadas $(1,-3,5)$?

(A) $-2x+y+5=0$ (B) $x+2y-10=0$ (C) $x+2y+5=0$ (D) $x-3y+5=0$

A base do cone é definida pela equação $x+2y-8=0$, com vetor normal $\vec{v}(1,2,0)$, então um plano parelelo à base tem o mesmo vetor normal e é do tipo $x+2y+d=0$, como o ponto $(1,-3,5)$, pertence ao plano, substituindo temos

$$1+2\times(-3)+d=0 \Leftrightarrow d=5$$

$\therefore$ $x+2y+5=0$ é uma equação que define o plano paralelo à base do cone.

OPÇÃO: C

4.2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine as coordenadas do ponto V.

Os pontos A e B pertencem à base do cone, logo, pertence ao plano definido pela equação $x+2y-8=0$.

Por observação da figura temos que:

A tem ordenada e cota nulas, logo, é do tipo $(x_A,0,0)$, isto é, $x_A+2\times0-8=0 \Leftrightarrow x_A=8$
Logo, $A(8,0,0)$

B tem abcissa e cota nulas, logo, é do tipo $(0,y_B,0)$, isto é, $0+2y_B-8=0 \Leftrightarrow y_B=4$
Logo, $B(0,4,0)$

Como $[AB]$ é um diâmetro, então, $M\left(\frac{8+0}{2},\frac{0+4}{2},\frac{0+0}{2}\right)=(4,2,0)$ é o centro da base do cone.

Assim, uma equação vetorial da reta que passa no centro do cone e por V é

$$(x,y,z)=(4,2,0)+k(1,2,0)\ ,\ k\in IR$$

Temos assim que as coordenadas de V são do tipo

$$(x,y,z)=(4+k,2+2k,0)\ ,\ k\in IR$$

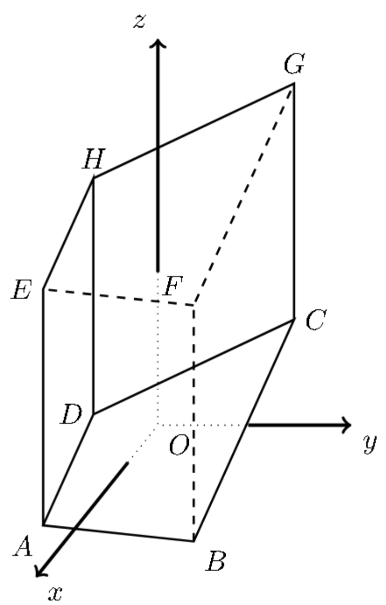
Como a abcissa de V tem menos uma unidade do que a sua ordenada, temos

$$4+k=2+2k-1 \Leftrightarrow k=3$$

$\therefore\ V(4+3,2+2\times 3,0)=(7,8,0)$

Exame 2024, época especial

5. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma reto $[ABCDEFGHG]$, de base $[ABCD]$ e $[EFGH]$.



Sabe-se que:

- as bases do prisma são trapézios retângulos;
- o ponto A tem coordenadas $(4,-4,-3)$, e o ponto B tem ordenadas igual ao dobro da abcissa;
- uma equação da reta BC é $(x,y,z)=(3,5,1)+k(2,3,6)\ ,\ k\in IR$

Qual das equações seguintes é uma equação do plano ABF?

(A) $2x+3y+6z+22=0$ (B) $2x+3y+6z-20=0$

(C) $3x-2y-20=0$ (D) $3x-2y-22=0$

A reta BC é perpendicular ao plano ABF, então $\vec{v}(2,3,6)$ é um vetor diretor do plano.

O plano ABF é do tipo $2x+3y+6z+d=0$, como A pertence ao plano

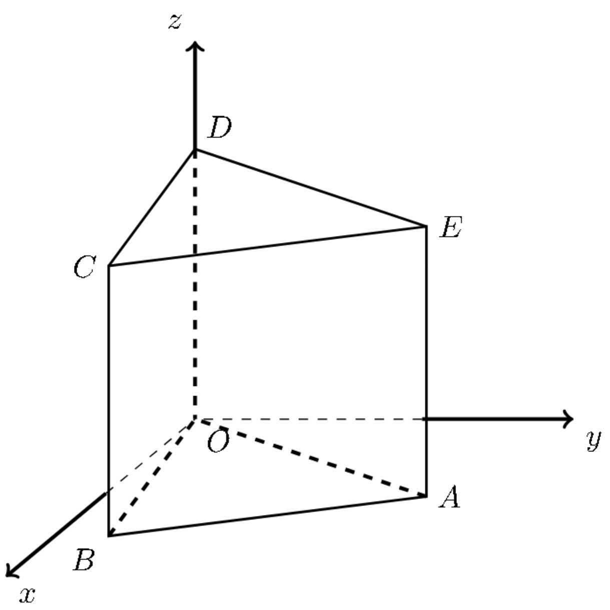
$2\times 2+3\times(-4)+6\times(-3)+d=0 \Leftrightarrow d=22$

$ABF:\ 2x+3y+6z+22=0$

OPÇÃO: A

Exame 2024, 1.ª fase

6. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma triangular reto $[OABCDE]$, de bases $[OAB]$ e $[CDE]$.



Sabe-se que:

- as coordenadas do ponto A são $\left(2\sqrt{3}, 6, 0\right)$;
- o ponto B pertence ao plano mediador so segmento de reta $[AO]$;
- a reta AB é definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (0, 16, 0) + k\left(\sqrt{3}, -5, 0\right)$, $k \in IR$;
- o ponto D pertence ao eixo Oz e tem cota 5.

6.1. Qual das seguintes equações define o plano que passa no ponto A e é perpendicular ao eixo Ox?

(A) $z = 0$ **(B)** $y = 6$ **(C)** $x = 2\sqrt{3}$ **(D)** $x + y + z = 0$

Um vetor diretor do eixo Ox é $\vec{v}(1, 0, 0)$, como o plano é perpendicular ao eixo Ox, então um vetor normal do plano é o vetor diretor de Ox.

(A) $z = 0$, vetor normal: $\vec{u}(0, 0, 1)$

(B) $y = 6$, vetor normal: $\vec{u}(0, 6, 0)$

(C) $x = 2\sqrt{3}$, vetor normal: $\vec{u}\left(2\sqrt{3}, 0, 0\right)$ e $\left(2\sqrt{3}, 0, 0\right) = k(1, 0, 0)$ com $k = 2\sqrt{3}$

OPÇÃO: C

6.2. Resolve este item sem recorrer à calculadora.

Determine o volume do prisma $[OABCDE]$.

B pertence ao plano mediador do segmento de reta $[OA]$. Seja M o ponto médio de $[OA]$, então $[BM]$ é a altura do triângulo $[OAB]$, relativamente à base $[OA]$.

Ponto M:

$$M\left(\frac{x_A + x_O}{2}, \frac{y_A + y_O}{2}, \frac{z_A + z_O}{2}\right) = \left(\frac{2\sqrt{3} + 0}{2}, \frac{6 + 0}{2}, \frac{0 + 0}{2}\right) = \left(\sqrt{3}, 3, 0\right)$$

Ponto B:

$$\overrightarrow{OA}=\left(2\sqrt{3}\,,6\,,0\right)$$
$$\overrightarrow{MB}=B-M=(x\,,y\,,z)-\left(\sqrt{3}\,,3\,,0\right)=\left(x-\sqrt{3}\,,y-3\,,z\right)$$

Usando o cálculo vetortial, a equação do plano mediador de $[OA]$ que passa pelo ponto B, é:

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{MB}=0\Leftrightarrow\left(2\sqrt{3},6,0\right)\cdot\left(x-\sqrt{3}\,,y-3\,,z\right)=0\Leftrightarrow 2\sqrt{3}x-6+6y-18=0$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}x+6y-24=0\Leftrightarrow\sqrt{3}x+3y-12=0$$

Temos que B pertence à reta AB, logo as suas coordenadas são do tipo $(x\,,y\,,z)=\left(k\sqrt{3}\,,16-5k\,,0\right)$

Substituíndo na equação do plano mediador temos:

$$\sqrt{3}\times k\sqrt{3}+3\times(16-5k)-12=0\Leftrightarrow 3k+48-15k-12=0\Leftrightarrow -12k=-36\Leftrightarrow k=3$$

Assim, $B\left(3\sqrt{3}\,,16-5\times 3\,,0\right)=\left(3\sqrt{3}\,,1\,,0\right)$

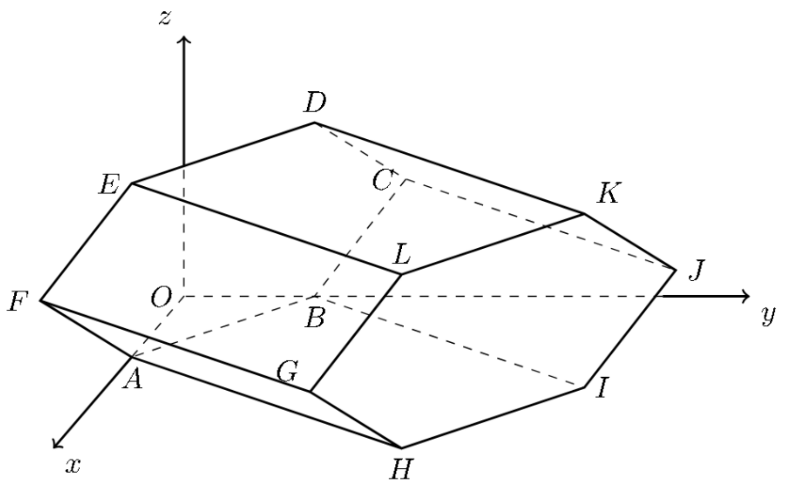
$$V_{[OABCDE]}=A_{[OAB]}\times\overline{OD}=\frac{\overline{OA}\times\overline{BM}}{2}\times\overline{OD}$$

$$\overline{OA}=\left\|\overrightarrow{OA}\right\|=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+6^2+0^2}=\sqrt{12+36}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$$
$$\overline{BM}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)^2+(3-1)^2+(0-0)^2}=\sqrt{12+4}=4$$
$$\overline{OD}=z_D=5$$

Assim, $V_{[OABCDE]}=\dfrac{4\sqrt{3}\times 4}{2}\times 5=40\sqrt{3}$ u.v.

Exame 2023, época especial

7. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma hexagonal reto $[ABCDEFGHIJKL]$, de bases $[ABCDEF]$ e $[GHIJKL]$.



Sabe-se que:

- as coordenadas dos vértices A e G do prisma são, respetivamente, $(4,0,0)$ e $\left(12,\frac{13}{2},2\right)$;
- a reta EL é definida pela equação vetorial $(x,y,z)=(-2,-8,4)+k(3,4,0)$, $k\in IR$

Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine as coordenadas do vértice F do prisma.

EL é paralela a FG

$FG:(x,y,z)=\left(12,\frac{13}{2},2\right)+k(3,4,0)$, $k\in IR$

Assim, um ponto da reta é do tipo $(x,y,z)=\left(12+3k,\frac{13}{2}+4k,2\right)$, $k\in IR$

$(3,4,0)$ é um vetor normal do plano EFA

$EFA: 3x+4y+d=0$

$A(4,0,0)$ pertence ao plano EFA

$3\times 4+4\times 0+d=0 \Leftrightarrow d=-12$

$EFA: 3x+4y-12=0$

O ponto F é ponto de interseção da reta FG e do plano EFA

$3(12+3k)+4\left(\frac{13}{2}+4k\right)-12=0 \Leftrightarrow 36+9k+26+16k-12=0 \Leftrightarrow k=-2$

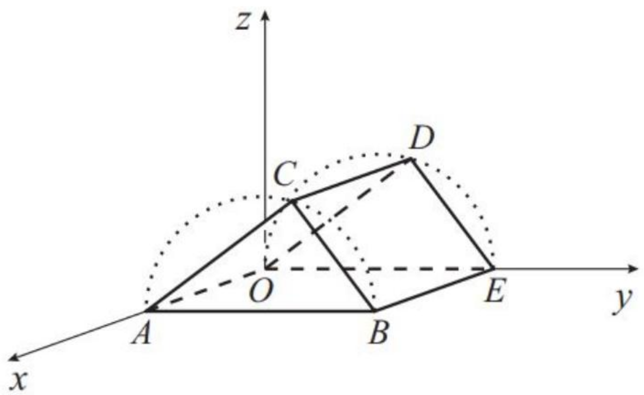
Assim, $F:(x,y,z)=\left(12+3(-2),\frac{13}{2}+4(-2),2\right)=\left(6,-\frac{3}{2},2\right)$

Exame 2023, 2.ª fase

8. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma triangular reto $[OABCDE]$, de bases $[ABC]$ e

$[OED]$.

Sabe-se que:



- as bases do prisma estão inscritas em semicircunferências, respetivamente, de diâmetros $[AB]$ e $[OE]$;
- os vértices A e E do prisma pertencem, respetivamente, aos semieixos positivos Ox e Oy ;
- $\overline{OE} = 12,5$;
- a reta AC é definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (10, 0, 0) + k(0, 4, 3)$, $k \in IR$

8.1. Qual das seguintes equações vetoriais define a reta OD ?

A reta OD é paralela à reta AC , então o vetor diretor de AC pode ser o mesmo da reta OD

Os vetores diretores das retas de (A) e (B) são os únicos que têm a mesma direção de AC

Como o ponto $O(0, 0, 0)$ pertence à reta OD temos:

(A) $(0, 0, 0) = (0, 6, 8) + k\left(0, 2, \frac{3}{2}\right), \quad k \in IR$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 6 + 2k \\ 0 = 8 + \frac{3}{2}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -3 = k \\ -\frac{16}{3} = k \end{cases}$$, logo não pode ser esta reta

(B) $(0, 0, 0) = (0, -4, -3) + k\left(0, 2, \frac{3}{2}\right), \quad k \in IR$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = -4 + 2k \\ 0 = -3 + \frac{3}{2}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 2 = k \\ 2 = k \end{cases}$$, logo o ponto O pertence à reta e tem a mesma direção de AB

OPÇÃO: B

8.2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine as coordenadas do ponto C.

$A(10, 0, 0)$ pertence à reta AC

$\overline{OE} = \overline{AB} = 12,5$ portanto $B(10; 12,5; 0)$

De $AC: (x, y, z) = (10, 0, 0) + k(0, 4, 3), \ k \in IR$

sabemos, que qualquer ponto da reta é do tipo $(x, y, z,) = (10, 4k, 3k), \ k \in IR$

O ponto C pertence à superfície esférica de centro no ponto médio de $[AB]$, seja M esse ponto.

$$M\left(\frac{10+10}{2}, \frac{0+12,5}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = \left(10, \frac{12,5}{2}, 0\right) = \left(10, \frac{25}{4}, 0\right)$$

A superfície esférica é:

$$(x-10)^2 + \left(y - \frac{25}{4}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{25}{4}\right)^2$$

Como C pertence à circunferência

$$(10-10)^2 + \left(4k - \frac{25}{4}\right)^2 + (3k)^2 = \left(\frac{25}{4}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16k^2 - 50k + \cancel{\left(\frac{25}{4}\right)^2} + 9k^2 = \cancel{\left(\frac{25}{4}\right)^2} \Leftrightarrow 25k^2 - 50k = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 2k = 0 \Leftrightarrow k(k-2) = 0 \Leftrightarrow k = 0 \vee k = 2$$

Se $k = 0$

$(x, y, z) = (10, 0, 0)$ este é o ponto A, que também pertence à superfície esférica

Se $k = 2$

$(x, y, z) = (10, 4 \times 2, 3 \times 2) = (10, 8, 6)$

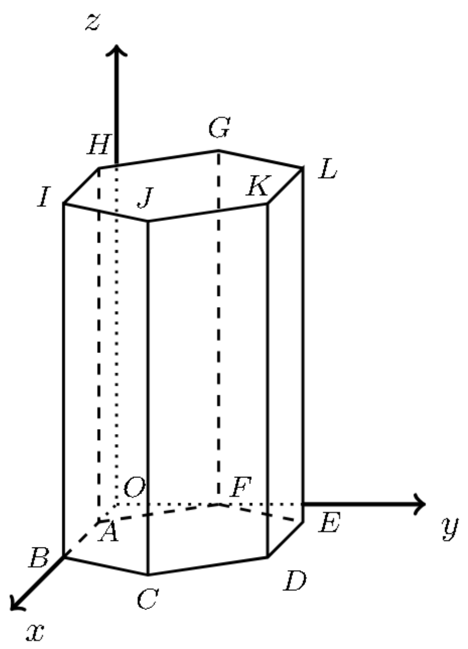
Portanto $C(10, 8, 6)$

Exame 2023, 1.ª fase

9. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma hexagonal reta $[ABCDEFGHIJKL]$, cujas bases são hexágonos regulares.

Sabe-se que:

- os vértices A e B pertencem ao semieixo positivo Ox e o vértice F pertence ao semieixo positivo Oy;
- o plano BCJ é definido pela equação $3x-\sqrt{3}y-6=0$;
- o centro do prisma, ponto equidistante de todos os vértices, é o ponto $M\left(\frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\right)$.



9.1. Qual das seguintes equações define o plano que contém a face $[GHIJKL]$?

(A) $z=2$ (B) $z=4$ (C) $x=\frac{4}{3}$ (D) $x=\frac{8}{3}$

Os vértices A e B pertencem ao semieixo positivo Ox e F pertence ao semieixo positivo Oy. Assim, a base $[ABCDEF]$ pertence ao plano Oxy.

Como o prisma é hexagonal é reto, então, $[GHIJKL]$ é paralela ao plano Oxy, isto é, o plano que contém a face $[GHIJKL]$ é definida pela equação $z=k$ com $k \in IR$.

M é equidistante de todos os vértices logo, M, é equidistante das duas bases. A cota de M é 2, logo a altura da base $[GHIJKL]$ é 4, pelo que a equação do plano que contém a face é $z=4$

OPÇÃO: B

9.2. Determine, sem recorrer à calculadora, uma equação cartesiana do plano LEF.

Apresente a equação na forma $ax+by+cz+d=0$, em que a, b, c e d são números reais.

As bases do prisma são hexágonos regulares. Assim, as faces laterais opostas são paralelas, em particular, os planos LEF e BCJ, isto é, os vetores normais são colineares.

Observando o plano BCJ, temos que um vetor normal é $\vec{n}_{BCJ}\left(3, -\sqrt{3}, 0\right)$

Assim, o plano LEF pode ser da forma, $3x-\sqrt{3}y+d=0$

B pertence ao semieixo positivo Ox, ou seja, B é do tipo $\left(x_B, 0, 0\right)$ com $x_B \in IR^+$, também se sabe que B pertence ao plano BCJ, assim:

$$3x_B+\sqrt{3}\times 0-6=0 \Leftrightarrow 3x_B=6 \Leftrightarrow x_B=2$$

Logo, $B(2,0,0)$

M é o centro do prisma, logo, M é o ponto médio do segmento de reta $[BL]$.

Assim, $L = M + \overrightarrow{BM}$

$$\overrightarrow{BM} = M - B = \left(\frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\right) - (2,0,0) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\right)$$

$$L = \left(\frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\right) + \left(-\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, 4\right)$$

Como L pertence ao plano LEF, então $3\times\frac{2}{3} - \sqrt{3}\times\frac{4\sqrt{3}}{3} + d = 0 \Leftrightarrow 2 - 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = 2$

$\therefore$ uma equação cartesiana do plano LEF na forma pedida é: $3x - \sqrt{3}y + 0z + 2 = 0$

Exame 2022, época especial

10. Na figura, está representado o cubo $[ABCDEFGH]$.

Fixado um determinado referencial o.n. $Oxyz$, tem-se:

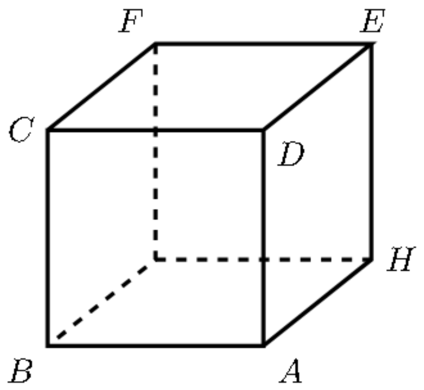
$$A(-2,5,0)\ ,\ B(1,-1,2)\ \text{ e }\ C(3,2,8)$$

Resolva este item sem recorre à calculadora.

Sabe-se que o vértice E do cubo pertence à reta definida pela equação

$$(x,y,z) = (0,0,3) + k(1,-1,-1)\ ,\ k \in IR$$

Determine as coordenadas do vértice E.



Como o vértice E do cubo pertence à reta definida pela equação $(x,y,z) = (0,0,3) + k(1,-1,-1)\ ,\ k \in IR$, então as coordenadas de E são da forma $(x,y,z) = (k,-k,3-k)\ ,\ k \in IR$

Temos que $[AB]$ e $[AE]$ são perpendiculares, logo, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} = 0$

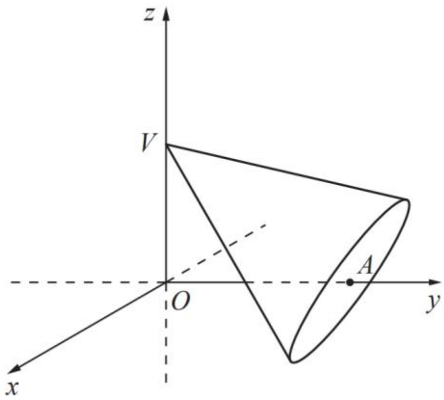
$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,-1,2) - (-2,5,0) = (3,-6,2)$$
$$\overrightarrow{AE} = E - A = (k,-k,3-k) - (-2,5,0) = (k+2,-k-5,3-k)$$

Assim, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} = 0 \Leftrightarrow (3,-6,2)\cdot(k+2,-k-5,3-k) = 0 \Leftrightarrow 3k+6+6k+30+6-2k = 0$
$\Leftrightarrow 7k = -42 \Leftrightarrow k = -6$

$\therefore\ E(k,-k,3-k) = (-6,6,9)$

Exame 2022, 2.ª fase

11. Na figura, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um cone reto de vértice V e base de centro no ponto A.



Sabe-se que:

- o ponto V pertence ao eixo Oz, e o ponto A pertence ao eixo Oy;
- a base do cone tem raio 3 e está contida no plano definido por $4x-3x=16$.

11.1. Qual das seguintes equações define um plano perpendicular ao plano que contém a base do cone e que passa no ponto de coordenadas $(1,2,-1)$?

(A) $4y-3z=11$ (B) $3x+4y+z=10$

(C) $3y+4z=8$ (D) $x+3y+4z=3$

O plano que contém a base do cone é $4y-3z=16$, seja $\vec{u}=(0,4,-3)$ um vetor normal ao plano.

Então qualquer vetor perpendicular a $\vec{u}$ é um vetor normal do plano perpendicular ao plano que contém a base do cone.

Seja $\vec{v}\perp\vec{u}$ então um vetor perpendicular pode ser $\vec{v}=(1,3,4)$

Logo o plano é do tipo $x+3y+4z+d=0$, como passa no ponto $(1,2,-1)$ calculemos o valor de d.

$1+3\cdot2+4\cdot(-1)+d=0 \Leftrightarrow 1+6-4+d=0 \Leftrightarrow d=-3$

Logo o plano pedido é $x+3y+4z=3$

OPÇÃO: D

11.2. Resolve este item sem recorrer à calculadora.

Determine o volume do cone.

O ponto A é do tipo $(0,y,0)$ e o ponto V é do tipo $(0,0,z)$

Como A faz parte do plano que contém a base então

$$4y-3\cdot0=16 \Leftrightarrow 4y=16 \Leftrightarrow y=4$$

Assim, tem-se $A(0,4,0)$

$[AV]$ é a altura do cone.

Vamos determinar a reta AV:

Vetor diretor é o vetor normal ao plano, isto é, $\vec{u}=(0,4,-3)$

Reta AV: $(x,y,z)=(0,4,0)+k(0,4,-3),\quad k\in IR$

Como $V(0,0,z)$, então

$$\begin{cases}0=0\\0=4+4k\\z=-3k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0=0\\k=-1\\z=3\end{cases}$$

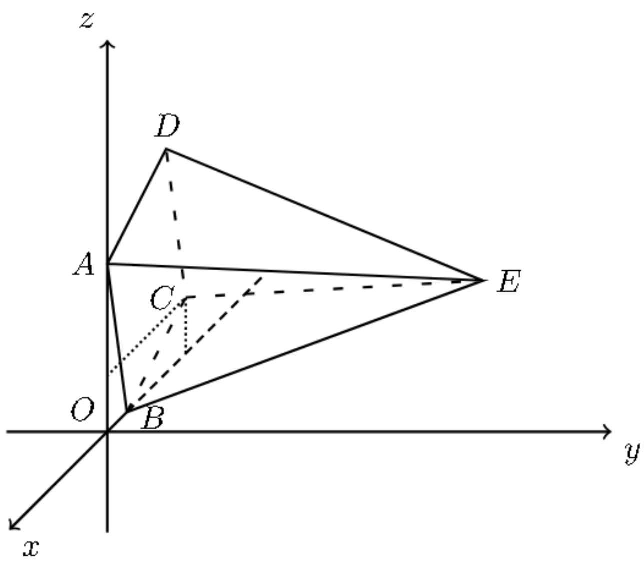
Logo $V(0,0,3)$ e $\overrightarrow{AV}=V-A=(0,0,3)-(0,4,0)=(0,-4,3)$

A altura do cone é $\left\|\overrightarrow{AV}\right\|=\sqrt{0^2+(-4)^2+3^2}=5$

Portanto $V_{cone}=\frac{1}{3}\times3^2\pi\times5=\frac{1}{3}\times9\pi\times5=15\pi$

Exame 2022, 1.ª fase

12. Na figura, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide regular de base quadrado $[ABCD]$ e vértice E.



Sabe-se que:

- a base da pirâmide está contida no plano Oxz
- o vértice A pertence ao semieixo positivo Oz e o vértice B pertence ao semieixo negativo Ox
- o vértice E tem coordenadas $(-2, 6, 2)$
- o vetor $\overrightarrow{BE}$ tem coordenadas $(-1, 6, 2)$
- o volume da pirâmide pe 20

Seja α o plano perpendicular à reta BE e que passa no ponto de coordenadas $(1, 0, 1)$

Qual das equações seguintes é uma equação do plano α ?

(A) $-x+6y+2z=0$ (B) $x+6y+2z-3=0$

(C) $x-6y-2z+1=0$ (D) $2x-y+4z-5=0$

α é perpendicular à reta BE, logo $\overrightarrow{BE}(-1, 6, 2)$ é um vetor normal de α
Assim, α é da forma

$$-x+6y+2z+d=0 \Leftrightarrow x-6y-2z-d=0$$

Como o ponto de coordenadas $(1, 0, 1)$ pertence ao plano, substituindo no plano, temos
$1+6\times0-2\times1-d=0 \Leftrightarrow -d=1$

Assim, uma equação do plano α é

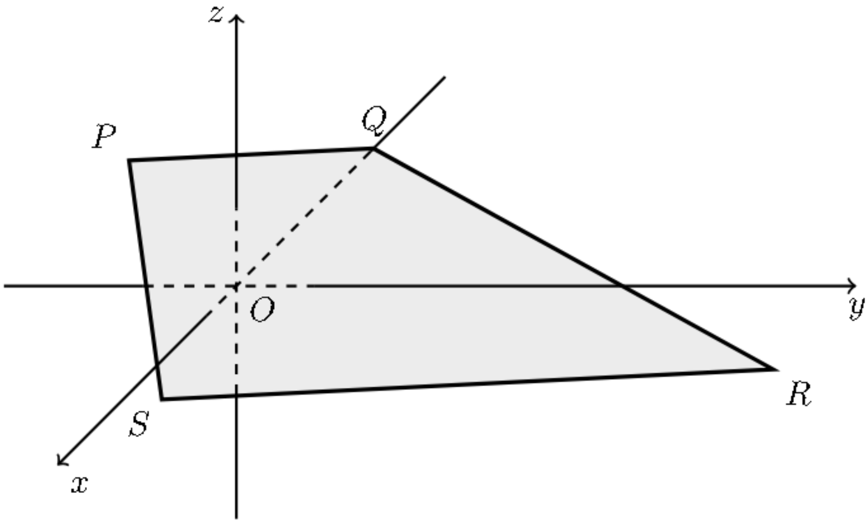
$$x-6y-2z+1=0$$

OPÇÃO: C

Exame 2021, época especial

13. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um trapézio $[PQRS]$, de bases $[PQ]$ e $[RS]$, em que o lado $[PS]$ é perpendicular às bases.

Tem-se $P(1,-1,2)$, $Q(-2,1,1)$ e $R(-5,5,-3)$



Determine uma equação do plano perpendicular à reta RS e que passa no ponto P.

Apresente essa equação na forma $ax+by+cz+d=0$

As retas PQ e RS são paralelas, uma vez que são as bases do trapézio.

Assim, um plano perpendicular à reta RS também é perpendicular à reta PQ, isto é, $\overrightarrow{PQ}$ é um vetor normal do plano.

$\overrightarrow{PQ}=Q-P=(-2,1,1)-(1,-1,2)=(-3,2,-1)$

Logo, a equação do plano é da forma $-3x+2y-z+d=0$

Sabe-se que o ponto P pertence ao plano, assim, substituindo $P(1,-1,2)$ no plano tem-se

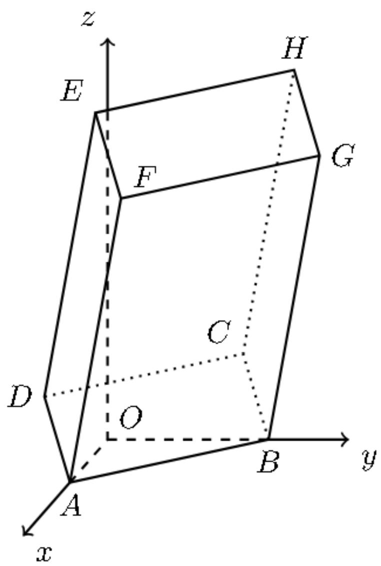
$$-3\times1+2\times(-1)-2+d=0 \Leftrightarrow -7+d=0 \Leftrightarrow d=7$$

Portanto uma equação do plano perpendicular a RS e que passa por P, é:

$$-3x+2y-z+7=0 \Leftrightarrow 3x-2y+z-7=0$$

Exame 2021, 2.ª fase

14. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um paralelepípedo retângulo $[ABCDEFGH]$.



Sabe-se que:

- o vértice A pertence ao eixo Ox e o vértice B pertence ao eixo Oy ;
- as coordenadas dos vértices E e G são $(7,2,15)$ e $(6,10,13)$, respetivamente;
- a reta EF é definida pela equação

$$(x,y,z)=(1,-2,19)+k(-3,-2,2)\ ,\ k\in IR$$

14.1. Qual das equações seguintes define uma reta perpendicular à reta EF e que passa por E ?

(A) $(x,y,z)=(7,-3,3)+k(-2,3,0)\ ,\ k\in IR$

(B) $(x,y,z)=(7,2,15)+k(0,3,-3)\ ,\ k\in IR$

(C) $(x,y,z)=(7,-10,3)+k(0,3,3)\ ,\ k\in IR$

(D) $(x,y,z)=(7,2,3)+k(2,0,-3)\ ,\ k\in IR$

Um vetor diretor da reta EF é $(-3,-2,2)$

Como as retas são perpendicluares, o produto escalar dos vetores diretores é zero, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

(A) $(-3,-2,2)\cdot(2,-3,0)=-6+6=0$

(B) $(-3,-2,2)\cdot(0,3,-3)=-6-6\neq0$

(C) $(-3,-2,2)\cdot(0,3,3)=-6+6=0$

(D) $(-3,-2,2)\cdot(2,0,-3)=-6-6\neq0$

Assim, as respostas possíveis são a (A) ou (C)

Vamos verificar se o ponto $E(7,2,15)$ pertence a uma das retas

(A) $(7,2,15)=(7,-3,3)+k(-2,3,0)\Leftrightarrow(7,2,15)=(7-2k,-3+3k,3)$
$\Leftrightarrow 7=7-2k\ \wedge\ 2=-3+3k\ \wedge\ 15=3$ condição impossível

(C) $(7,2,15)=(7,-10,3)+k(0,3,3)\Leftrightarrow(7,2,15)=(7,-10+3k,3+3k)$
$\Leftrightarrow 7=7\ \wedge\ 2=-10+3k\ \wedge\ 15=3+3k\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 7=7\ \wedge\ 12=3k\ \wedge\ 12=3k\Leftrightarrow 7=7\ \wedge\ k=4\ \wedge\ k=4$
Logo pertence

OPÇÃO: C

14.2. Determine sem recorrer à calculadora, a equação reduzida da superfície esférica de centro no ponto B e que passa no ponto D .

A equação da superfície esférica de centro no ponto B e que passa no ponto D , tem centro num ponto do eixo Oy e raio igual a $\overline{EG}$

$$\overline{EG}=\sqrt{(6-7)^2+(10-2)^2+(13-15)^2}=\sqrt{1+84+4}=\sqrt{69}$$

Sabemos que B pertence ao eixo Oy, logo é da forma $(0\ ,\ y_B\ ,\ 0)$

Como B pertence ao plano BGF e a reta EF é perpendicular ao plano, temos que $(-3\ ,\ -2\ ,\ 2)$ é um vetor normal do plano, isto é, BGF é da forma

$$-3x-2y+2z+d=0$$

Como $G(6\ ,\ 10\ ,\ 13)$ pertence ao plano, subsituindo, temos

$$-3\times 6-2\times 10+2\times 13+d=0 \Leftrightarrow d=12$$

Logo, a equação do plano é

$$-3x-2y+2z+12=0$$

Assim, de $B(0\ ,\ y_B\ ,\ 0)$, vem

$$-3\times 0-2y_B+2\times 0+12=0 \Leftrightarrow y_B=6$$

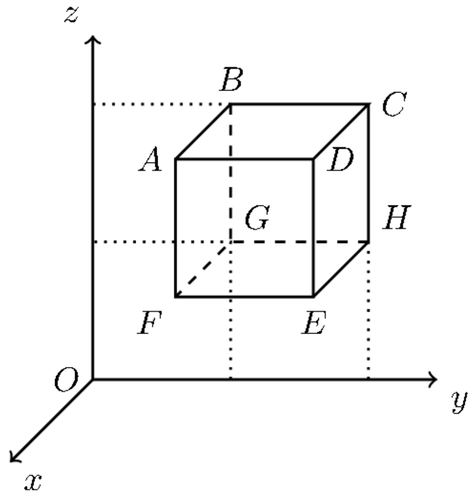
Então, $B(0\ ,\ 6\ ,\ 0)$

Portanto a equação da superfície esférica pedida é:

$$x^2+(y-6)^2+z^2=69$$

Exame 2021, 2.ª fase

15. Na figura seguinte, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cubo $[ABCDEFGH]$ em que cada aresta é paralela a um dos eixos coordenados.



Sabe-se que:

- o vértice B tem coordenadas $(0,2,4)$;
- o vetor $\overrightarrow{BE}$ tem coordenadas $(2,2,-2)$;
- a aresta $[BG]$ é paralela so eixo Oz.

Seja α o plano que passa por G e é perpendicular à reta OE

Sejam P, Q e R os pontos de α que pertencem aos eixos coordenados.

Determine o volume da pirâmide $[OPQR]$

Vamos começar pode determinar o plano α para termos as coordenadas dos pontos P, Q e R

Sabe-se que OE é perpendicular a α, logo um vetor diretor de OE é um vetor normal de α.

Temos que $E=B+\overrightarrow{BE}=(0,2,4)+(2,2,-2)=(2,4,2)$

Daqui resulta que $\overrightarrow{OE}=(2,4,2)$ é um vetor normal de α

Então, $\alpha: 2x+4y+2z+d=0$

Sabemos, através das coordenas de B e E temos que a aresta do cubo é 2

Como $[BG]$ é paralelo ao eixo Oz então, $G(0,2,2)$

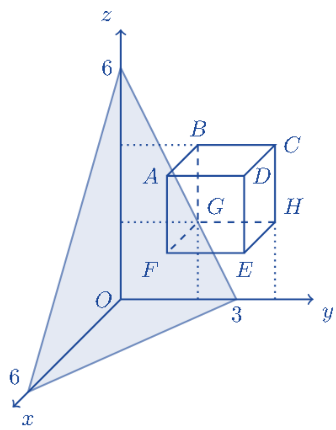
G pertence ao plano, assim

$$2\times 0+4\times 2+2\times 2+d=0 \Leftrightarrow d=-12$$

Pelo que a equação do plano α é:

$$2x+4y+2z-12=0$$

Portanto as coordenadas dos ponto P, Q e R são:



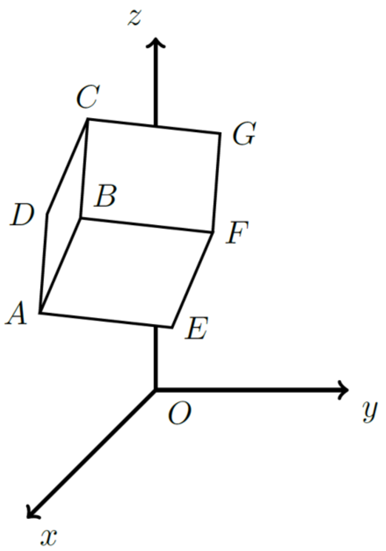
$P:\ (y=0 \wedge z=0) \longrightarrow 2x+4\times 0+2\times 0-12=0 \Leftrightarrow x=6$
$Q:\ (x=0 \wedge z=0) \longrightarrow 2\times 0x+4y+2\times 0-12=0 \Leftrightarrow y=3$
$R:\ (x=0 \wedge y=0) \longrightarrow 2\times 0+4\times 0+2z-12=0 \Leftrightarrow z=6$

Assim, a base da pirâmide $[OPQR]$ é um triângulo retângulo e a altura é 6

$$V_{[OPQR]}=\frac{A_{[OPQ]}\times h}{3}=\frac{\frac{x_P\times y_Q}{2}\times z_R}{3}=\frac{\frac{6\times 3}{2}\times 6}{3}=18 \text{ u.v.}$$

Exame 2020, época especial

16. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo [*ABCDEFGH*] (o ponto H não está representado na figura).



Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(7,1,4)$
- o ponto G tem coordenadas $(5,3,6)$
- a reta AE é definida pela equação vetorial

  $(x,y,z)=(7,1,4)+k(3,-6,2)\ ,\ k\in IR$

Resolva o item sem recorrer à calculadora.

Determine uma equação do plano EFG

Apresente o resultado da equação na forma $ax+by+cz+d=0$

EFG é perpendicular à reta AE , logo o vetor diretor da reta, $(3,-6,2)$ é o vetor do plano EFG
Isto é, EFG é da forma

$$3x-6y+2z+d=0$$

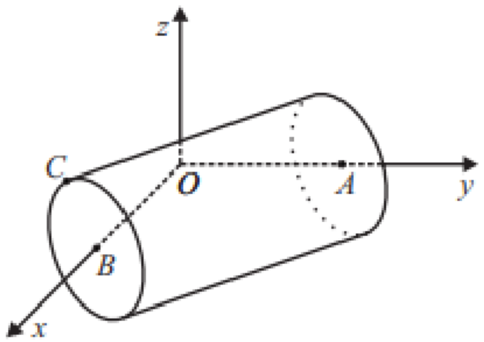
Como $G(5,3,6)$ pertence ao plano, substituindo obtemos

$$3\times5-6\times3+2\times6+d=0 \Leftrightarrow d=-9$$

$\therefore\ EFG:\ 3x-6y+2z-9=0$

Exame 2020, 2.ª fase

17\. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cilindro reto.



Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo Oy e é o centro de uma das bases do cilindro, e o ponto B pertence ao eixo Ox e é o centro da outra base;
- o ponto C pertence à circunferência de centro B que delimita uma das bases do cilindro;
- o plano ABC é definido pela equação $3x+4y+4z-12=0$

Resolva os itens sem recorrer à calculadora.

17.1. Determine $\overline{BC}$, sabendo que o volume do cilindro é igual a 10π.

$\overline{AB}$ é igual à altura do cilindro, logo vamos começar por determinar as coordenadas dos pontos A e B

O ponto A pertence ao eixo Oy, logo A é da forma $(0\,,\,y_A\,,\,0)$ e como pertence ao plano ABC, temos

$$3\times 0+4y_A+4\times 0-12=0 \Leftrightarrow y_A=3$$

Pelo que $A(0\,,3\,,0)$

O ponto B pertence ao eixo Ox, logo B é da forma $(x_B\,,\,0\,,\,0)$ e como pertence ao plano ABC, temos

$$3x_B+4\times 0+4\times 0-12=0 \Leftrightarrow x_B=4$$

Pelo que $B(4\,,0\,,0)$

Assim, $\overline{AB}=\sqrt{(4-0)^2+(0-3)^2+(0-0)^2}=\sqrt{25}=5$

$V_{\text{cilindro}}=A_{\text{base}}\times\text{altura}=\pi\times\overline{BC}^2\times\overline{AB}$

Portanto, $\pi\times\overline{BC}^2\times\overline{AB}=V_{\text{cilindro}} \Leftrightarrow \pi\times\overline{BC}^2\times 5=10\pi \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \overline{BC}^2=\frac{10\pi}{5\pi}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC}^2=2$$

$$\underset{\overline{BC}\geq 0}{\Leftrightarrow} \overline{BC}=\sqrt{2}$$

17.2. Seja P o ponto de coordenadas $(3\,,5\,,6)$

Determine as coordenadas do ponto do plano ABC que se encontra mais próximo do ponto P

Seja Q um ponto do plano ABC, para que seja o mais próximo de P então a reta PQ tem que ser perpendicular ao plano, isto é, o vetor normal do plano $(3\,,4\,,4)$, é um vetor diretor da reta PQ.

Pelo que a equação vetorial de PQ é

$$(x,y,z)=(3,5,6)+k(3,4,4)\ ,\ k\in IR$$

Logo, o ponto Q é da forma

$$(x,y,z)=(3+3k\,,5+4k\,,6+4k)$$

Como Q pertence ao plano ABC, sudstituindo, obtemos

$$3(3+3k)+4(5+4k)+4(6+4k)-12=0\Leftrightarrow 9+9k+20+16k+24+16k-12=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k=-1$$

Portanto as coordenadas do ponto Q são

$$(3+3\times(-1)\,,5+4\times(-1)\,,6+4\times(-1))=(3-3\,,5-4\,,6-4)=(0\,,1\,,2)$$

Exame 2020, 1.ª fase