TRIGONOMETRIA – GLOBAL 2

1. Sabendo que $\text{sen}\,\alpha = -\frac{1}{3}$ e que $\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, calcula o valor exato de:

1.1. $\cos\alpha$

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{9}$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{8}{9}$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{8}{9}}$

$\alpha \in 3^{o}Q. / \cos\alpha < 0$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{8}}{3}$

$\Leftrightarrow \cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

1.2. $\tan\alpha$

$\tan\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$

$\Leftrightarrow \tan\alpha = \frac{-1/\cancel{3}}{\frac{-2\sqrt{2}}{\cancel{3}}}$

$\Leftrightarrow \tan\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \tan\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

2. Determina o valor exato de $\tan\alpha - \text{sen}\,\alpha$, sabendo que $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$ e que $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{1}{16} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}^2\alpha = \frac{15}{16} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}\,\alpha = \pm\sqrt{\frac{15}{16}}$, $\alpha \in 2^{o}Q.$, $\text{sen}\,\alpha > 0$

$\Leftrightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\tan\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \tan\alpha = \frac{\sqrt{15}/\cancel{4}}{-1/\cancel{4}} \Leftrightarrow \tan\alpha = -\sqrt{15}$

$\tan\alpha - \text{sen}\,\alpha = -\sqrt{15} - \frac{\sqrt{15}}{4} = -\frac{5\sqrt{15}}{4}$

3. Considera a função real de variável real f , definida por:

$$f(x) = 1 + 2\,\mathrm{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

3.1. Mostra que 2π é período de f .

$$f(x+2\pi) = 1+2\,\mathrm{sen}\left(x+2\pi-\frac{\pi}{4}\right) = 1+2\,\mathrm{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = f(x)$$

logo $\forall x \in \mathbb{R},\ x+2\pi \in \mathbb{R} \wedge f(x+2\pi) = f(x)$

Assim, 2π é período de f

3.2. Determina uma expressão dos zeros de f .

$f(x)=0 \Leftrightarrow 1+2\,\mathrm{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \mathrm{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$ $\quad \mathrm{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x-\frac{\pi}{4} = \pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x = \frac{\pi}{4}+\pi+\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12}+2k\pi \vee x = \frac{17}{12}\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

3.3. Determina os valores de x , pertencentes ao intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$, tais que $f(x) = 2$

$f(x)=2 \Leftrightarrow 1+2\,\mathrm{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2 \Leftrightarrow \mathrm{sen}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ $\quad \mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x-\frac{\pi}{4} = \pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12}+2k\pi \vee x = \frac{13}{12}\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

C.A. $k=0,\ x=\cancel{\frac{5\pi}{12}} \vee x=\frac{13}{12}\pi$

$k=1,\ x=\frac{29\pi}{12} \vee x=\cancel{\frac{37\pi}{12}}$

$k=-1,\ x=\cancel{-\frac{19}{12}\pi} \vee x=\cancel{-\frac{11}{12}\pi}$

$k=2,\ x=\cancel{\frac{53}{12}\pi} \vee x=\cancel{\frac{61}{12}\pi}$

No intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$

$C.S. = \left\{\frac{13}{12}\pi, \frac{29}{12}\pi\right\}$

4. Resolve as seguintes equações:

4.1. $\cos x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$, em $[-2\pi, \pi]$

$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$k=0, x = \frac{\pi}{6} \vee x = -\frac{\pi}{6}$

$k=-1, x = -\frac{11}{6}\pi \vee x = -\cancel{\frac{13\pi}{6}}$

$k=1, x = \cancel{\frac{13}{6}}\pi \vee x = \cancel{\frac{11\pi}{6}}$

$C.S = \left\{-\frac{11}{6}\pi, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$

4.2. $\sqrt{2}\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$, em IR

$\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$

$\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \vee 3x - \frac{\pi}{3} = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow 3x = \frac{13}{12}\pi + 2k\pi \vee 3x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{13\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = -\frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

4.3. $\cos x = \operatorname{sen} x$, em IR

$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \vee \cancel{x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi}, k \in \mathbb{Z}$

$2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

4.3. $\operatorname{sen}^2 x + \cos x = 1$, em $\left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$

$1 - \cos^2 x + \cos x = 1 \Leftrightarrow -\cos^2 x + \cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \vee \cos x = 1$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$k=0, x = \frac{\pi}{2} \vee x = 0$

$k=1, x = \frac{3\pi}{2} \vee x = 2\pi$

$k=-1, x = -\frac{\pi}{2} \vee x = \cancel{-2\pi}$

$k=2, x = \frac{5\pi}{2} \vee x = \cancel{4\pi}$

$k=-2, x = -\frac{3\pi}{2} \vee x = \cancel{-4\pi}$

$C.S = \left\{-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}\right\}$

5. Considera a função real de variável real f, definida por:

$$f(x) = 1 + 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

5.1. Determina o contradomínio da função f

$\cos x \in [-1, 1]$

$-1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2 \leq 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 2$

$\Leftrightarrow -1 \leq 1 + 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 3$

$D'_f = [-1, 3]$

5.2. Determina uma expressão dos zeros de f

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x + \frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

6. Mostra que sempre que as expressões têm significado, se tem:

6.1. $(\cos\beta - \text{sen}\,\beta)^2 = 2 - (\cos\beta + \sin\beta)^2$

$$(\cos\beta - \text{sen}\,\beta)^2 = \cos^2\beta - 2\cos\beta\,\text{sen}\,\beta + \text{sen}^2\beta$$
$$= \underbrace{\cos^2\beta + \text{sen}^2\beta}_{=1} - 2\cos\beta\,\text{sen}\,\beta$$
$$= 1 - 2\cos\beta\,\text{sen}\,\beta$$
$$= 1 + 1 - 1 - 2\cos\beta\,\text{sen}\,\beta$$
$$= 2 - (1 + 2\cos\beta\,\text{sen}\,\beta)$$
$\hookrightarrow \text{sen}^2\beta + \cos^2\beta$
$$= 2 - (\text{sen}^2\beta + 2\cos\beta\,\text{sen}\,\beta + \cos^2\beta)$$
$$= 2 - (\text{sen}\,\beta + \cos\beta)^2$$

6.2. $\frac{\cos^2\alpha}{1+\text{sen}\,\alpha} = 1 - \text{sen}\,\alpha$

$$\frac{\cos^2\alpha}{1+\text{sen}\,\alpha} = \frac{1 - \text{sen}^2\alpha}{1+\text{sen}\,\alpha} = \frac{(1-\text{sen}\,\alpha)\cancel{(1+\text{sen}\,\alpha)}}{\cancel{1+\text{sen}\,\alpha}} =$$
$$= 1 - \text{sen}\,\alpha$$

6.3. $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta \times \cos\theta}$

$$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} =$$

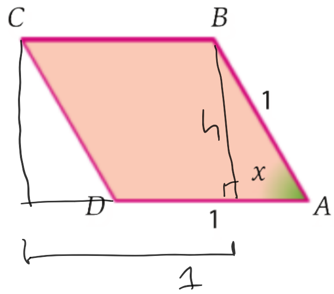
$$= \frac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta \operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$$

6.4. $\frac{\operatorname{sen}\beta}{1+\cos\beta} = \frac{1-\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}$

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{1+\cos\beta} = \frac{\operatorname{sen}\beta(1-\cos\beta)}{(1+\cos\beta)(1-\cos\beta)} = \frac{\operatorname{sen}\beta(1-\cos\beta)}{1-\cos^2\beta}$$

$$= \frac{\cancel{\operatorname{sen}\beta}(1-\cos\beta)}{\operatorname{sen}^{\cancel{2}}\beta} = \frac{1-\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}$$

7. O losango $[ABCD]$, representado na figura, tem lado unitário. O ângulo DAB tem amplitude de x radianos ($x \in \,]0, \pi[$).



7.1. Mostra que a área do losango é dada, em função de x, pela seguinte expressão analítica:

$$A(x) = \operatorname{sen} x$$

Sugestão: Na determinação da área do losango, considera-o um paralelogramo.

$A(x) = \overline{AD} \times h$

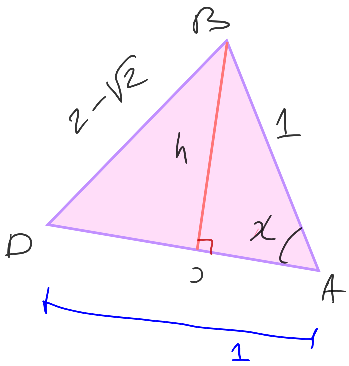
$\operatorname{sen} x = \frac{h}{1} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = h$

$A(x) = 1 \times \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$

c.q.m.

7.2. Considera $\overline{DB} = 2 - \sqrt{2}$

7.2.1 Determina $\cos x$



$h = \overline{BP}$

$\overline{AP} = \cos x$

$h^2 + \cos^2 x = 1^2$

$h^2 = 1 - \cos^2 x$

$\overline{DP} = 1 - \overline{AP}$

$\overline{DP} = 1 - \cos x$

$h^2 + \overline{DP}^2 = (2-\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow h^2 = (2-\sqrt{2})^2 - (1-\cos x)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h^2 = 4 - 4\sqrt{2} + 2 - 1 + 2\cos x - \cos^2 x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{1 - \cancel{\cos^2 x}}_{} = 5 - 4\sqrt{2} + 2\cos x - \cancel{\cos^2 x}$

$\Leftrightarrow 1 - 5 + 4\sqrt{2} = 2\cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4 + 4\sqrt{2} = 2\cos x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos x = -2 + 2\sqrt{2}$

7.2.2 Calcula o valor exato da área do losango.

$$\cos x = -2 + 2\sqrt{2}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - (-2+2\sqrt{2})^2$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - (4 - 8\sqrt{2} + 8)$$

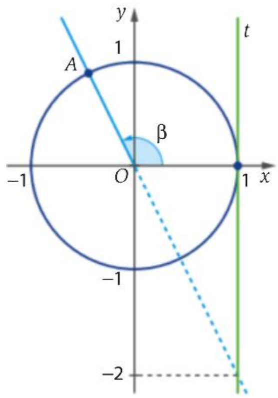
$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - 12 + 8\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 x = -11 + 8\sqrt{2}, \quad x \in]0, \pi[, \ \operatorname{sen} x > 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \sqrt{-11 + 8\sqrt{2}}$$

$$A = \sqrt{8\sqrt{2} - 11}$$

8. Na figura ao lado estão representados, num referencial o.n. do plano:



- a circunferência trigonométrica;
- um ângulo, de amplitude β, que tem por lado origem o semieixo positivo das abcissas e por outro lado extremidade a semirreta $\dot{O}A$;
- a reta t , de equação $x = 1$

Determina o valor exato da expressão

$$\cos^2 \beta - \tan \beta - \operatorname{sen} \beta$$

$$\tan \beta = -2$$

$$\tan^2 \beta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \beta} \Leftrightarrow (-2)^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 \beta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 = \frac{1}{\cos^2 \beta}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \beta = \frac{1}{5}$$

$$\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \beta = 1 - \frac{1}{5} \Leftrightarrow \operatorname{sen}^2 \beta = \frac{4}{5}.$$

$$\beta \in 2.^{\circ}Q, \ \operatorname{sen} \beta > 0 \qquad \operatorname{sen} \beta = \sqrt{\frac{4}{5}} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos^2 \beta - \tan \beta - \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{5} - (-2) - \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{11 - 2\sqrt{5}}{5}$$

9. Mostra que, no seu domínio, são universais as seguintes condições:

9.1. $(1-\operatorname{sen}\alpha)(1+\operatorname{sen}\alpha)=\cos^2\alpha$

$$(1-\operatorname{sen}\alpha)(1+\operatorname{sen}\alpha)=1-\operatorname{sen}^2\alpha=\cos^2\alpha$$

9.2. $\frac{1}{\cos^2\beta}-\cos^2\beta=\operatorname{sen}^2\beta\left(\frac{1}{\cos^2\beta}+1\right)$

$$\frac{1}{\cos^2\beta}-\cos^2\beta=\frac{1}{\cos^2\beta}-(1-\operatorname{sen}^2\beta)$$

$$=\frac{1}{\cos^2\beta}-1+\operatorname{sen}^2\beta$$

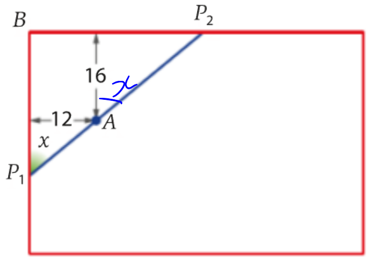
$$=\frac{1-\cos^2\beta+\operatorname{sen}^2\beta\cos^2\beta}{\cos^2\beta}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}^2\beta+\operatorname{sen}^2\beta\cos^2\beta}{\cos^2\beta}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}^2\beta(1+\cos^2\beta)}{\cos^2\beta}=$$

$$=\operatorname{sen}^2\beta\left(\frac{1}{\cos^2\beta}+1\right)$$

10. Na figura está representado um lago artificial de forma retangular.



Pretende-se construir uma ponte, ligando duas margens do lago, entre os pontos $\boldsymbol{P_1}$ e $\boldsymbol{P_2}$, tal como a figura ilustra.

A ponte tem um ponto de apoio A , situado a 12 m de uma das margens e a 16 m da outra.

Seja $\boldsymbol{x}$ a amplitude do ângulo P_2P_1B , considerando que a localização de P_1 e de P_2 pode variar.

10.1. Mostra que o comprimento da ponte, em metros, é dado por

$$C(x) = \frac{16 \operatorname{sen} x + 12 \cos x}{\operatorname{sen} x \cos x}$$

$\overline{P_1P_2} = \overline{P_1A} + \overline{AP_2}$ $\quad$ $\operatorname{sen} x = \frac{12}{\overline{AP_1}} \Leftrightarrow \overline{AP_1} = \frac{12}{\operatorname{sen} x}$

$\cos x = \frac{16}{\overline{AP_2}} \Leftrightarrow \overline{AP_2} = \frac{16}{\cos x}$

Assim $\overline{P_1A} + \overline{AP_2} = \frac{12}{\operatorname{sen} x} + \frac{16}{\cos x} =$

$= \frac{12 \cos x + 16 \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x \cos x}$ $\quad$ c.q.m.

10.2. Determina o comprimento da ponte para o qual se tem $\overline{BP_1} = \overline{BP_2}$

Apresenta o resultado em metros, arredondado às décimas.

Sendo $\overline{BP_1} = \overline{BP_2}$ então $x = \frac{\pi}{4}$ porque $\tan x = 1$

$$c\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{12\cos\frac{\pi}{4} + 16\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{12\sqrt{2}}{2} + \frac{16\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{\frac{28\sqrt{2}}{2}}{\frac{2}{4}} = \frac{14\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 28\sqrt{2} \approx 39,6$$

11. Admite que a temperatura da água de um lago, em graus Celsius, pode ser dada, aproximadamente, por:

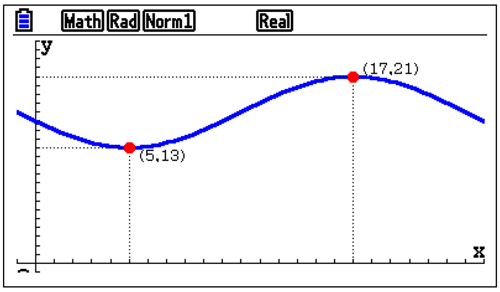
$$f(t) = 17 + 4\cos\left(\frac{\pi(t+7)}{12}\right)$$

Onde t designa o tempo, em horas, decorrido entre os zeros e as vinte e quatro horas de um determinado dia.

(Considera que o argumento da função cosseno está expresso em radianos)

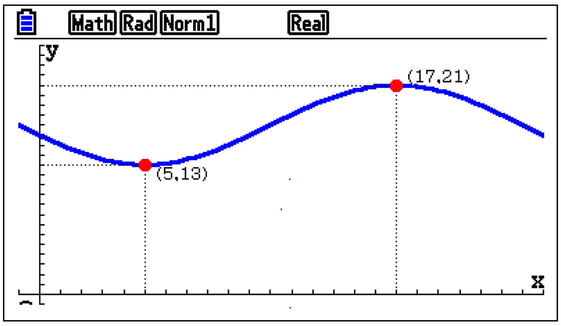
Recorrendo às capacidades da calculadora gráfica, determina:

11.1. Os intervalos onde a função é crescente e decrescente.



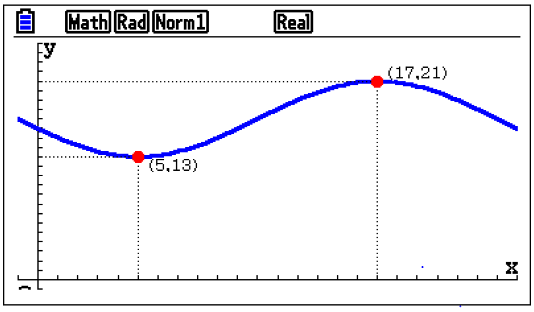
A função é crescente no intervalo [5, 17]
e é decrescente nos intervalos [0,5] e [17, 21]

11.2. A que horas é que a temperatura é máxima e qual é o valor desse máximo.



A temperatura máxima é 21 e acontece às 17 horas

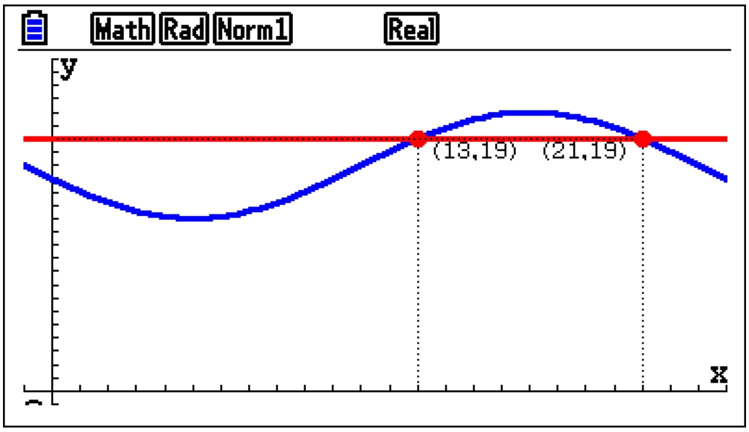
11.3. A que horas é que a temperatura é mínima e qual o valor desse mínimo.



A temperatura mínima é 13º e aconteceu às 5 horas

11.4. As melhores horas para se tomar banho, admitindo que um banho só é realmente bom se a temperatura da água não for inferior a 19 graus Celsius.

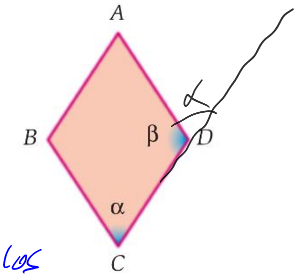
Nota: em todas as respostas, apresenta um esboço do gráfico da calculadora e assinala todos os pontos relevantes para a tua resposta.



As melhores horas é entre as 13 e as 21 horas.

12. Na figura, está representado o losango $[ABCD]$.

Sabendo que $\cos\beta = -0{,}8$, determina:



$$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) + \tan(\pi + \alpha)$$

α e β são as amplitudes dos ângulos internos do losango então $\beta + \alpha = \pi \Leftrightarrow \beta = \pi - \alpha$

$\cos\beta = -0{,}8 \Leftrightarrow \cos(\pi - \alpha) = -0{,}8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\cos\alpha = -0{,}8$

$\tan^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \tan^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{0{,}8^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{0{,}64} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\frac{64}{100}} - 1$

$\Leftrightarrow \tan^2\alpha = \dfrac{100}{64} - 1$

$\Leftrightarrow \tan^2\alpha = \dfrac{36}{64}$ $\qquad \alpha \in 1.^{\circ}Q,\ \tan\alpha > 0$

$\Leftrightarrow \tan\alpha = \sqrt{\dfrac{36}{64}}$

$\Leftrightarrow \tan\alpha = \dfrac{6}{8}$

$\Leftrightarrow \tan\alpha = \dfrac{3}{4}$

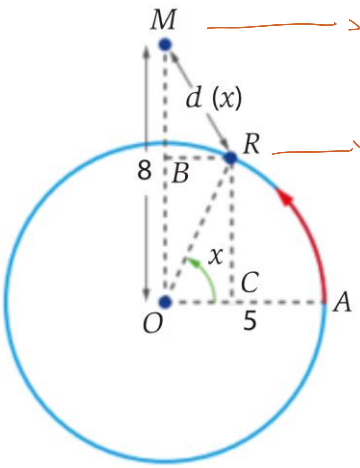
$\tan\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \tan\alpha \cos\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{8}{10}$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{6}{10}$

$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) + \tan(\pi + \alpha) = \operatorname{sen}\alpha + \tan\alpha = \dfrac{6}{10} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{27}{20}$

13. A Rita foi andar de carrossel. O esquema abaixo representa a situação a seguir descrita.



$\to M(0,8)$

$\to R(5\cos x, 5\operatorname{sen} x)$

Em cada volta, que se inicia no ponto A, a Rita descreve uma circunferência com 5 metros de raio, centrada no ponto O, rodando no sentido indicado na figura.

A mãe da Rita ficou a observá-la de um ponto M, situado à distância de 8 metros de O e tal que o ângulo AOM é reto.

Para cada posição R da Rita, fica determinado um ângulo de amplitude x, medida em radianos, que tem como lado origem a semirreta $\dot{O}A$ e como lado extremidade a semirreta $\dot{O}R$.

13.1. Mostra que, para cada valor de x, a distância $d(x)$, da Rita à mãe, é dada, em metros, por:

$$d(x) = \sqrt{89 - 80 \operatorname{sen} x}$$

$$\underbrace{d(R,M)}_{d(x)} = \sqrt{(5\cos x - 0)^2 + (5\operatorname{sen} x - 8)^2}$$

$$= \sqrt{25\cos^2 x + 25\operatorname{sen}^2 x - 80\operatorname{sen} x + 64}$$

$$= \sqrt{25(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) + 64 - 80\operatorname{sen} x}$$

$$= \sqrt{25 + 64 - 80\operatorname{sen} x}$$

$$= \sqrt{89 - 80\operatorname{sen} x} \quad \text{c.q.m.}$$

13.2. Calcula $d\left(\frac{\pi}{2}\right)$ e justifica o valor obtido, no contexto do problema.

$$d\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{89 - 80 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}} = \sqrt{89-80} = \sqrt{9} = 3$$

Neste caso o ponto R está sobre [OM]

Pelo que $\overline{RM}$ é a diferença entre 8 e 5

13.3. Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, determina para que valores de x se tem $d(x) = 7$.

Sugestão: Começa por elevar ambos os membros da equação ao quadrado.

$$\sqrt{89 - 80 \operatorname{sen} x} = 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 89 - 80 \operatorname{sen} x = 49$$

$$\Leftrightarrow -80 \operatorname{sen} x = 49 - 89$$

$$\Leftrightarrow -80 \operatorname{sen} x = -40$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{-40}{-80}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$

$-80 \leq \operatorname{sen} x \leq 80$

então

$89 - 80 \operatorname{sen} x > 0$

$\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

como x é positivo então

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{N}_0$$