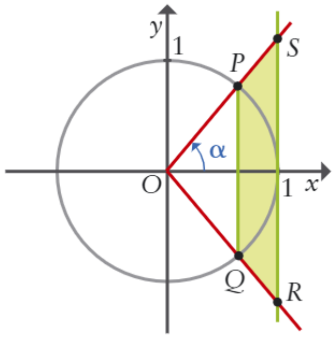
Trigonometria – Funções Trigonométricas

1. Na figura ao lado estão representados, em referencial o.n. xOy, circunferência trigonométrica e a reta de equação $x = 1$. Considera que um ponto P se desloca sobre a circunferência, no primeiro quadrante.



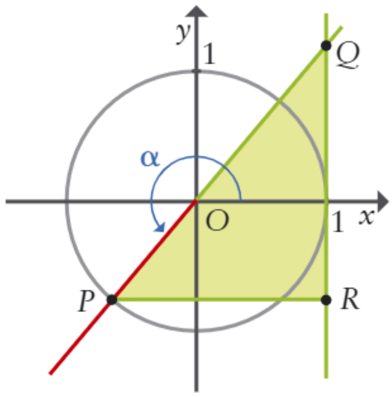
Para cada posição do ponto P :

- seja α a amplitude do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}P$ $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$;
- seja $f(\propto)$ a área do trapézio $[PQRS]$ (S é o ponto de interseção da reta OP com a reta de equação $x = 1$ e os pontos Q e R são, respetivamente, os simétricos dos pontos P e S em relação ao eixo Ox).

a) Mostra que $f(\propto) = (\tan \propto + \sin \propto)(1 - \cos \propto)$.

b) Determina a área do trapézio, no caso em que a abcissa do ponto P é $\frac{1}{3}$.

2. Na figura ao lado estão representados, em referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica e a reta de equação $x = 1$. Considera que um ponto P se desloca sobre a circunferência, no terceiro quadrante,



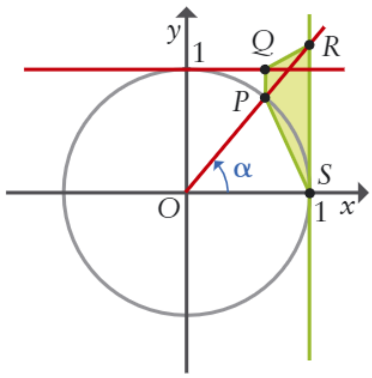
Para cada posição do P :

- seja α a amplitude do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}P$ $\left(\alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[\right)$;
- seja $f(\propto)$ a área do triângulo $[PQR]$ (Q é o ponto de interseção da reta OP com a reta de equação $x = 1$ e R é o ponto desta reta que tem ordenada igual à do ponto P).

a) Mostra que $f(\propto) = \frac{(1-\cos\propto)(\tan\propto - \sin\propto)}{2}$.

b) Para um certo $x \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$, tem-se $\tan x = \frac{4}{3}$. Determina $f(x)$.

3. Na figura ao lado estão representados, em referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica e a reta de equação $x = 1$. Considera que o ponto P se desloca sobre a circunferência, no primeiro quadrante.



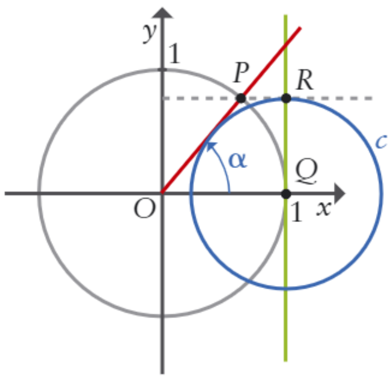
Para cada posição do ponto P:

- seja α a amplitude do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}P$ $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$;
- seja $f(\alpha)$ a área do trapézio $[PQRS]$ (Q é o ponto da reta de equação $y = 1$ que tem abcissa igual à do ponto P, R é o ponto de interseção OP com a reta de equação $x = 1$ e S é o ponto de coordenadas $(1, 0)$).

a) Mostra que $f(\alpha) = \frac{(1-\cos\alpha)(1+\tan\alpha-\sin\alpha)}{2}$

b) Determina $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

4. Na figura ao lado estão representados, em referencial o.n. xOy, a circunferência trigonométrica e a reta de equação $x = 1$. Considera que um ponto P se desloca sobre a circunferência, no primeiro quadrante.



Para cada posição do ponto P:

- seja α a amplitude do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}P$ $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$;
- seja R o ponto de abcissa 1 que tem ordenada igual à de P;
- seja c a circunferência de centro em $Q(1, 0)$ que passa pelo ponto R.

a) A circunferência c interseta a circunferência trigonométrica em dois pontos que têm a mesma abcissa. Determina essa abcissa, em função de α.

b) Prova que a reta OP é tangente à circunferência c.

5. Seja $f: \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x) = 2 - 4\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

a) Determina o zero da função f.

b) Indica o contradomínio da função f.

c) Sejam A e B os pontos de interseção do gráfico da função f com os eixos Ox e Oy, respetivamente.
Sejam P e Q os pontos do gráfico da função f de ordenada máxima e mínima, respetivamente. Seja C o ponto de interseção da reta PQ com o eixo Ox.
Determina a área do triângulo $[ABC]$.

Soluções

1.

b) $\frac{16\sqrt{2}}{9}$

2.

b) $\frac{128}{75}$

3.

b) $\frac{2+\sqrt{3}}{8}$

4.

a) $\frac{1+\cos^2 \alpha}{2}$

5.

a) $x = \frac{\pi}{3}$ **b)** $D'_f = [-2, 6]$ **c)** $Área = \frac{\pi}{6}$