Trigonometria e Funções Trigonométricas **Resolução**

1. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \frac{1 - \sin(4x)}{2}$$

19.1 Determina o contradomínio de f .

$x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 4x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -1 \leq \operatorname{sen}(4x) \leq 1$ | $\operatorname{sen} x \in [-1,1]$

$\Leftrightarrow 1 \geq -\operatorname{sen}(4x) \geq -1$

$\Leftrightarrow -1 \leq -\operatorname{sen}(4x) \leq 1$

$\Leftrightarrow 1-1 \leq 1-\operatorname{sen}(4x) \leq 1+1$

$\Leftrightarrow 0 \leq 1-\operatorname{sen}(4x) \leq 2$

$\Leftrightarrow \frac{0}{2} \leq \frac{1-\operatorname{sen}(4x)}{2} \leq \frac{2}{2}$

$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1-\operatorname{sen}(4x)}{2} \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq f(x) \leq 1$

$D'_f = [0,1]$

19.2 Mostra que f é periódica de período $\frac{\pi}{2}$.

$x \in D_f$, então $x + \frac{\pi}{2} \in D_f$, $D_f \in \mathbb{R}$

Vamos verificar $f(x+\pi/2)$

$$f(x+\pi/2) = \frac{1-\operatorname{sen}(4(x+\pi/2))}{2}$$

$$= \frac{1-\operatorname{sen}(4x+2\pi)}{2}$$

$$= \frac{1-\operatorname{sen}(4x)}{2}$$

$\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} 2x$

$= f(x)$ então

$f(x+\pi/2) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

logo $f(x)$ é periódica com período $\frac{\pi}{2}$

19.3 Sabendo que $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ e que $f(\pi+\alpha)\times f(\pi-\alpha) = \frac{4}{25}$, determina $f(\alpha)$.

$f(\pi+\alpha)\times f(\pi-\alpha) = \frac{4}{25} \Leftrightarrow$

$$\frac{1-\operatorname{sen}(4(\pi+\alpha))}{2} \times \frac{1-\operatorname{sen}(4(\pi-\alpha))}{2} = \frac{4}{25} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1-\operatorname{sen}(4\pi+4\alpha)}{2} \times \frac{1-\operatorname{sen}(4\pi-4\alpha)}{2} = \frac{4}{25}$$

$$\frac{1-\operatorname{sen}(4\alpha)}{2} \times \frac{1-\operatorname{sen}(-4\alpha)}{2} = \frac{4}{25}$$

Como $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen}(\alpha)$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\text{sen}(4\alpha)}{2} \times \frac{1+\text{sen}(4\alpha)}{2} = \frac{4}{25} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+\cancel{\text{sen}(4\alpha)}-\cancel{\text{sen}(4\alpha)}-\text{sen}^2(4\alpha)}{4} = \frac{4}{25} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\text{sen}^2(4\alpha) = \frac{16}{25} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\text{sen}^2(4\alpha) = -1+\frac{16}{25} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}^2(4\alpha) = 1-\frac{16}{25} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}^2(4\alpha) = \frac{9}{25}$$

$$\Leftrightarrow \text{sen}(4\alpha) = \pm\sqrt{\frac{9}{25}}$$

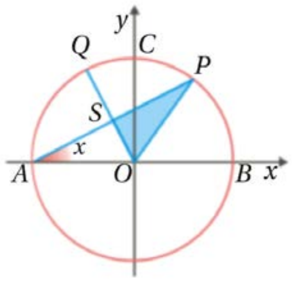
$$\Leftrightarrow \text{sen}(4\alpha) = \frac{3}{5} \vee \text{sen}(4\alpha) = -\frac{3}{5}$$

Como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ então $4\alpha \in \left]\pi, 2\pi\right[$

logo $\text{sen}(4\alpha) = -\frac{3}{5}$

$$f(\alpha) = \frac{1-\text{sen}(4\alpha)}{2} = \frac{1+\frac{3}{5}}{2} = \frac{\frac{8}{5}}{2} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

2. Na Figura 1 está representado um referencial ortonormado Oxy e a circunferência trigonométrica que interseta o eixo Ox nos pontos A e B (B com abcissa positiva) e o semieixo Oy no ponto C. O Ponto P desloca-se sobre o arco CA de tal modo que OQ é sempre perpendicular a AP.



As semirretas $\dot{A}P$ e $\dot{O}Q$ intersetam-se no ponto S .

2.1 Para cada $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, seja $g(x)$ a área do triângulo $[OPS]$.

Mostra que $g(x) = \frac{1}{4}\sin(2x)$

2.2 Determina o contradomínio da função g e indica a área máxima do triângulo $[OPS]$.

2.3 Sabendo que a abcissa do ponto P é $\frac{5}{13}$, determina a área do triângulo $[OPS]$.

3. Determina o valor exato de:

3.1 $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$

3.2 $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

4. Mostra que $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}$

5. Considera as funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = 3\cos\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{3}\sin(3x)$$

5.1 Prova que f é uma função periódica de período 4π .

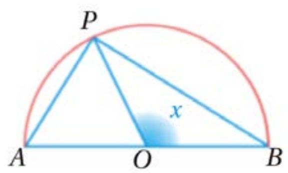
5.2 Prova que g é uma função periódica e indica o período mínimo.

5.3 Sabendo que $f(\pi - 2\alpha) = 1$ e que $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, determina $g\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{3}\right)$.

5.4 Mostra que a função $h = f \times g$ é uma função ímpar.

6. Um ponto P desloca-se sobre uma semicircunferência de diâmetro $[AB]$, centro O e raio 1.

Seja x a amplitude, em radianos, do ângulo BOP $(x \in]0, \pi[)$.



Seja $f(x) = \overline{BP}$ e $g(x) = \overline{AP}$.

6.1 Justifica que o triângulo $[ABP]$ é retângulo em P .

6.2 Justifica que $f(x) = 2\sin\frac{x}{2}$ e $g(x) = 2\cos\frac{x}{2}$.

6.3 Sabendo que $f(\pi - 2\alpha) = 1$ e $\alpha \in]0, \pi[$, determina $\overline{AP}$ para $x = \alpha$.