

1. Determina o termo geral de cada uma das seguintes progressões aritméticas:

1.1 $5, 10, 15, 20, 25, 30, \dots$

$$5n$$

1.2 $-4, -7, -10, -13, -16, \dots$

$$\text{A razão é } -3, \text{ então o termo geral é: } -4 - 3(n - 1) = -3n - 1$$

1.3 $\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{10}{3}, \frac{13}{3}, \dots$

$$\text{A razão é } u_2 - u_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$$

$$\text{O termo geral é: } \frac{1}{3} + 1 \times (n - 1) = n - \frac{2}{3}$$

2. De uma progressão aritmética a_n , sabe-se $a_1 = 5$ e que $r = 2$.

- 2.1 Calcula a_{10} e a_{29}

$$a_{10} = a_1 + r \times (10 - 1) = 5 + 18 = 23$$

$$a_{29} = a_1 + r \times (29 - 1) = 5 + 56 = 61$$

- 2.2 Escreve o termo geral da sucessão

$$a_n = a_1 + r(n - 1) = 5 + 2(n - 1) = 2n + 3$$

- 2.3 Calcula a soma dos termos compreendidos entre a_{10} e a_{29} (inclusive).

$$S = a_{10} + a_{11} + \dots + a_{29} = \frac{a_{10} + a_{29}}{2} \times 20 = 840$$

3. A sucessão a_n é uma progressão aritmética da qual se conhece os o primeiro termo e a razão:

$$a_1 = \frac{3}{2}; r = -\frac{1}{2}$$

Calcula a_7 , a_{20} e a_{50} .

$$a_7 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \times 6 = -\frac{3}{2}$$

$$a_{20} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \times 19 = -8$$

$$a_{50} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \times 49 = -23$$

4. Considera as sucessões a_n e b_n definidas como se segue:

$$a_n = \frac{2-4n}{3} \quad \text{e} \quad \begin{cases} b_1 = 2 \\ b_{n+1} = b_n - \frac{3}{2} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$$

- 4.1 Mostra que as sucessões a_n e b_n são progressões aritméticas.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2-4(n+1)}{3} - \frac{2-4n}{3} = \frac{2-4n-4-2+4n}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$b_{n+1} - b_n = -\frac{3}{2}$$

- 4.2 Determina o primeiro termo e a razão das progressões aritméticas a_n e b_n .

$$a_1 = \frac{2-4}{3} = -\frac{2}{3} \text{ e } r = -\frac{4}{3}$$

$$b_1 = 2 \text{ e } r = -\frac{3}{2}$$

- 4.3 Estuda a monotonia das progressões.

a_n , é decrescente, uma vez que $a_{n+1} - a_n < 0$, de 4.1

b_n , é decrescente, uma vez que $b_{n+1} - b_n < 0$, de 4.1

5. Determina a razão e o termo geral de uma progressão aritmética u_n , sabendo que:

5.1 $u_1 = 15$ e $u_{12} = 169$

$$\text{Razão: } u_{12} = u_1 + r(12 - 1) \Leftrightarrow 169 = 15 + 11r \Leftrightarrow r = \frac{169-15}{11} \Leftrightarrow r = 14$$

$$\text{Termo geral: } u_n = 15 + 14(n - 1) \Leftrightarrow u_n = 15 + 14n - 14 \Leftrightarrow u_n = 14n + 1$$

5.2 $u_1 = 5$ e $u_{10} + u_{15} = 102$

$$\text{Razão: } u_{10} + u_{15} = 102 \Leftrightarrow u_1 + r(10 - 1) + u_1 + r(15 - 1) = 102$$

$$\Leftrightarrow 2u_1 + 23r = 102 \Leftrightarrow r = \frac{102-2u_1}{23} \Leftrightarrow r = \frac{102-10}{23} \Leftrightarrow r = 4$$

$$\text{Termo geral: } u_n = 5 + 4(n - 1) \Leftrightarrow u_n = 5 + 4n - 4 \Leftrightarrow u_n = 4n + 1$$

5.3 $u_1 + u_2 + \dots + u_{20} = 420$ e $u_{10} - u_{11} = -2$

Razão: $u_{10} - u_{11} = -2 \Leftrightarrow u_{11} - u_{10} = 2, r = 2$

$$\begin{aligned} \begin{cases} s_{20} = 420 \\ u_{20} = u_1 + 19r \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u_1 + u_{20}}{2} \times 20 = 420 \\ u_{20} = u_1 + 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_{20} = 42 \\ u_{20} = u_1 + 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 42 - u_{20} \\ u_{20} = 42 - u_{20} + 38 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} u_1 = 42 - u_{20} \\ 2u_{20} = 80 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 42 - 40 \\ u_{20} = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{20} = 40 \end{cases} \end{aligned}$$

Termo geral: $u_n = 2 + 2(n - 1) \Leftrightarrow u_n = 2 + 2n - 2 \Leftrightarrow u_n = 2n$

6. Calcula o valor de S , sendo:

6.1 $S = 2 + 4 + 6 + \dots + 100$

Soma dos 50 primeiros termos pares

$$S = \frac{2+100}{2} \times 50 = 2550$$

6.2 $S = 100 + 101 + 102 + \dots + 109$

Soma dos 10 números inteiros consecutivos

De 100 a 109.

$$S = \frac{100+109}{2} \times 10 = 1045$$

7. Numa progressão aritmética u_n , $u_5 = 2$ e $u_{10} = 26$.

Determina a soma dos dezoitos primeiros termos da progressão.

$$u_{10} = u_5 + 5r \Leftrightarrow r = \frac{u_{10} - u_5}{5} \Leftrightarrow r = \frac{26 - 2}{5} = 4,8$$

$$u_5 = u_1 + 4r \Leftrightarrow u_1 = u_5 - 4r \Leftrightarrow u_1 = 2 - 4 \times 4,8 \Leftrightarrow r = -17,2$$

$$u_{18} = u_{10} + 8r = 26 + 8 \times 4,8 = 64,4$$

$$S_{18} = \frac{u_1 + u_{18}}{2} \times 18 = \frac{-17,2 + 64,4}{2} \times 18 = 424,8$$

8. A soma dos 60 primeiros termos consecutivos de uma progressão aritmética é 240 e a razão é 4 .

8.1 Calcula o primeiro termo.

$$u_n = u_1 + 4(n - 1)$$

$$S_{60} = 240 \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_{60}}{2} \times 60 = 240 \Leftrightarrow u_1 + u_{60} = 8$$

$$\begin{cases} u_{60} = u_1 + 4 \times 59 \\ u_1 + u_{60} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{60} = u_1 + 236 \\ u_1 = 8 - u_{60} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{60} = 8 - u_{60} + 236 \\ u_1 = 8 - u_{60} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_{60} = 244 \\ u_1 = 8 - u_{60} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u_{60} = 122 \\ u_1 = 8 - 122 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_{60} = 122 \\ u_1 = -114 \end{cases}$$

8.2 Escreve a expressão do termo de ordem n .

$$u_n = -114 + 4n - 4 = 4n - 118$$

9. De uma progressão aritmética u_n sabe-se que $u_5 + u_9 = 32$ e que $u_{17} - u_{13} = 12$.

9.1 Determina o primeiro termo e a razão da progressão.

$$\begin{cases} u_5 + u_9 = 32 \\ u_{17} - u_{13} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 4r + u_1 + 8r = 32 \\ u_1 + 16r - u_1 - 12r = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 12r = 32 \\ 4r = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 12 \times 3 = 32 \\ r = 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2u_1 = -4 \\ r = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -2 \\ r = 3 \end{cases}$$

9.2 Indica a expressão do termo geral.

$$u_n = -2 + 3n - 3 = 3n - 5$$

9.3 A soma dos n primeiros termos consecutivos da progressão aritmética é 174.

Determina o valor de n .

$$S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n \Leftrightarrow \frac{u_1 + u_n}{2} \times n = 174 \Leftrightarrow (-2 + 3n - 5)n = 348 \Leftrightarrow 3n^2 - 7n - 348 = 0 \Leftrightarrow$$

$$n = 12 \vee n = -\frac{29}{3}$$

Como $n \in \mathbb{N}$, $n = 12$

10. Numa determinada região atingida por fogos florestais, as entidades ambientais projetam um repovoamento com 10 080 árvores de forma progressiva, isto é, no primeiro ano pretende-se plantar 80 árvores e, nos anos seguintes, plantar-se-á mais 40 árvores do que no ano anterior.

Quantos anos serão necessários para implementar completamente o projeto? Justifica a tua resposta.

O número de árvores a plantar anualmente aumenta em progressão aritmética, cujo primeiro termo é $a_1 = 80$ e a razão é 40.

O termo geral desta progressão aritmética é $a_n = a_1 + r(n - 1) = 80 + 40n - 40 = 40n + 40$

Como se pretende plantar um total de 10 080, tem-se:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \times n \Leftrightarrow \frac{80 + 40n + 40}{2} \times n = 10080 \Leftrightarrow 20n^2 + 60n - 10080 = 0 \Leftrightarrow n = 21 \vee n = -24$$

Como $n \in \mathbb{N}$, $n = 21$

São necessários 21 anos para que o projeto fique completo.

11. De entre as seguintes sucessões, definidas pelos seus termos gerais, indica as que são progressões aritméticas, progressões geométricas e as que não são progressões.

11.1 $a_n = \frac{3}{n}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3}{n+1} - \frac{3}{n} = \frac{3n - 3n - 3}{n(n+1)} = \frac{-3}{n(n+1)}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3}{n+1}}{\frac{3}{n}} = \frac{n}{n+1}$$

Como não são constantes, a_n , não é uma progressão.

11.2 $b_n = 2^n \times 5^n$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{n+1} \times 5^{n+1}}{2^n \times 5^n} = 2 \times 5 = 10$$

Como $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 10$, então b_n é uma progressão geométrica.

11.3 $c_n = 3n - 7$

$$c_{n+1} - c_n = 3(n+1) - 7 - 3n + 7 = 3$$

Como $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} - c_n = 3$, então c_n é uma progressão aritmética.

11.4 $d_n = 2 \times \frac{(-1)^n}{3^n}$

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{2 \times \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}}{2 \times \frac{(-1)^n}{3^n}} = -\frac{1}{3}$$

Como $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{d_{n+1}}{d_n} = -\frac{1}{3}$, então d_n é uma progressão geométrica.

12. Determina os valores reais de m para os quais os números $m - 6$, $12 - m$ e $4m - 3$ são termos consecutivos de uma progressão geométrica.

Sendo $m - 6$, $12 - m$ e $4m - 3$ termos consecutivos de uma progressão geométrica, então a razão (quociente) entre o terceiro e o segundo tem de ser igual à razão (quociente) entre o segundo e o primeiro, isto é,

$$\frac{4m-3}{12-m} = \frac{12-m}{m-6} \Leftrightarrow (4m-3)(m-6) = (12-m)^2 \Leftrightarrow 4m^2 - 24m - 3m + 18 = 144 - 24m + m^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 3m - 126 = 0 \Leftrightarrow m = 7 \vee m = -6$$

13. Considera a sucessão definida por $u_n = 3 + \frac{3}{n+2}$

13.1 Averigua se a progressão é aritmética ou geométrica.

$$u_{n+1} - u_n = 3 + \frac{3}{n+3} - 3 - \frac{3}{n+2} = \frac{3n+6-3n-9}{(n+3)(n+2)} = \frac{-3}{(n+3)(n+2)}, \text{ logo não é uma progressão aritmética.}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 + \frac{3}{n+3}}{3 + \frac{3}{n+2}} = \frac{\frac{3n+12}{n+3}}{\frac{3n+9}{n+2}} = \frac{(3n+12)(n+2)}{(3n+9)(n+3)} = \frac{(n+4)(n+2)}{(n+3)^2}, \text{ logo não é uma progressão geométrica}$$

13.2 Determina u_1 , u_{10} e u_{98} termos da sucessão.

$$u_1 = 3 + \frac{3}{3} = 4 \quad ; \quad u_{10} = 3 + \frac{3}{12} = \frac{13}{4} \quad ; \quad u_{98} = 3 + \frac{3}{100} = \frac{303}{100}$$

13.3 Averigua se $\frac{11}{10}$ é termo da sucessão.

$$u_n = \frac{11}{10} \Leftrightarrow 3 + \frac{3}{n+2} = \frac{11}{10} \Leftrightarrow \frac{3}{n+2} = \frac{11}{10} - 3 \Leftrightarrow \frac{3}{n+2} = -\frac{19}{10} \Leftrightarrow \frac{n+2}{3} = -\frac{10}{19} \Leftrightarrow n+2 = -\frac{30}{19} \wedge n \neq -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = -\frac{30}{19} - 2 \Leftrightarrow n = -\frac{68}{19} \notin \mathbb{N}$$

Logo, $\frac{11}{10}$ não é termo da sucessão

13.4 Mostra que $\frac{16}{5}$ é termo da sucessão.

$$u_n = \frac{16}{5} \Leftrightarrow 3 + \frac{3}{n+2} = \frac{16}{5} \Leftrightarrow \frac{3}{n+2} = \frac{16}{5} - 3 \Leftrightarrow \frac{3}{n+2} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{n+2}{3} = 5 \wedge n \neq -2 \Leftrightarrow n+2 = 15 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = 13 \in \mathbb{N}$$

Logo $\frac{16}{5}$ é termo da sucessão.

13.5 Mostra que a sucessão é monótona decrescente.

$$\text{De 13.1 } u_{n+1} - u_n = \frac{-3}{(n+3)(n+2)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Portanto a sucessão é monótona decrescente.

13.6 Determina a ordem $p \in \mathbb{N}$ a partir da qual se tem $3 - 0,01 \leq u_n \leq 3 + 0,01$

$$3 - 0,01 \leq u_n \leq 3 + 0,01 \Leftrightarrow -0,01 \leq u_n - 3 \leq 0,01 \Leftrightarrow |u_n - 3| \leq 0,01 \Leftrightarrow$$

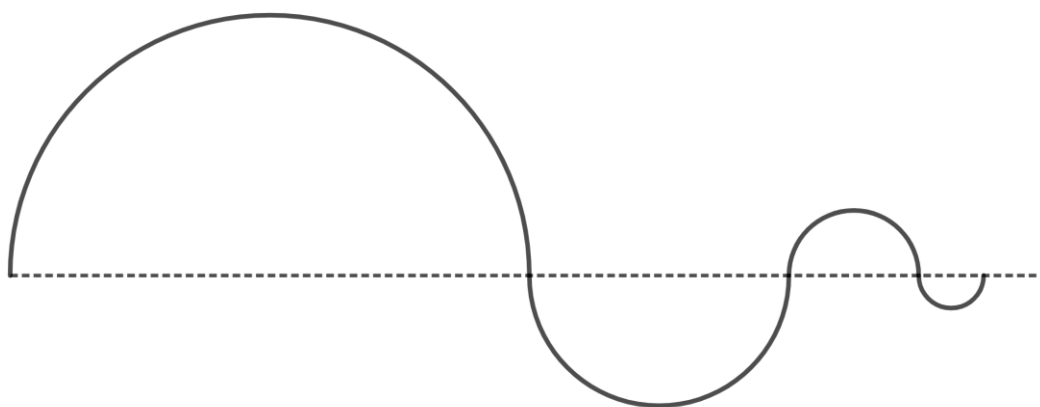
$$\Leftrightarrow \left| 3 + \frac{3}{n+2} - 3 \right| \leq \frac{1}{100} \Leftrightarrow \left| \frac{3}{n+2} \right| \leq \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{3}{n+2} \leq \frac{1}{100} \Leftrightarrow \frac{n+2}{3} \geq 100 \Leftrightarrow n+2 \geq 300 \Leftrightarrow n \geq 298$$

Então $p = 298$

$$\frac{3}{n+2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

14. Na figura está representada uma linha que é formada por semicircunferências.

Para a sua construção, parte-se de uma semicircunferência de raio 4 e as que se seguem têm raio igual a metade do raio anterior. Admite que a construção continua indefinidamente.



Considera a sucessão, P_n , dos perímetros das circunferências desenhadas.

14.1 Determina os quatro primeiros termos desta sucessão.

$$P_1 = \frac{2\pi \times 4}{2} = 4\pi \quad P_2 = \frac{2\pi \times 2}{2} = 2\pi \quad P_3 = \frac{2\pi \times 1}{2} = \pi \quad P_4 = \frac{2\pi \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}\pi$$

14.2 Mostra que o termo geral da sucessão, P_n , é $P_n = 2^{3-n} \times \pi$.

$$r = \frac{P_{n+1}}{P_n} \Leftrightarrow r = \frac{P_2}{P_1} \Leftrightarrow r = \frac{2\pi}{4\pi} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$\text{Assim, } P_n = P_1 \times r^{n-1} = 4\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^2 \times 2^{-(n-1)} \times \pi = 2^{3-n} \times \pi, \forall n \in \mathbb{N}$$

14.3 Calcula o comprimento da linha desenhada acima (considerando que a construção continua indefinidamente).

Seja S_n a soma dos n primeiros termos de P_n

$$S_n = P_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 4\pi \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = 8\pi \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 8\pi - 8\pi \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Como a construção continua indefinidamente, à medida que $n \mapsto \infty$, $-8\pi \left(\frac{1}{2}\right)^n$, vai ficando cada vez mais perto de 0.

Portanto o comprimento da linha é 8π

15. De uma progressão geométrica monótona, sabe-se que $u_5 = 125$ e $u_{11} = \frac{1}{125}$

15.1 Escreve uma expressão para o termo geral da progressão.

$$u_n = u_1 \times r^{n-1}$$

$$\begin{cases} u_5 = u_1 \times r^{5-1} \\ u_{11} = u_1 \times r^{11-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 125 = u_1 \times r^4 \\ \frac{1}{125} = u_1 \times r^{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{125}{r^4} \\ \frac{1}{125} = \frac{125}{r^4} \times r^{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{125}{r^4} \\ \frac{1}{15625} = r^6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u_1 = \frac{125}{r^4} \\ r = \pm \sqrt[6]{\frac{1}{15625}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{125}{\left(\frac{1}{5}\right)^4} \\ r = \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 78125 \\ r = \frac{1}{5} \end{cases},$$

Como a progressão é monótona a razão é positiva, $r = \frac{1}{5}$

$$u_n = 78125 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

15.2 Calcula a soma dos doze primeiros termos.

$$S_{12} = u_1 \times \frac{1-r^{12}}{1-r} = 78125 \times \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{12}}{1-\frac{1}{5}} = 97656,2496$$

16. Seja, v_n , uma progressão geométrica não monótona em que $v_3 = 4v_1$ e $v_5 = 48$.

16.1 Determina a razão da progressão.

$$v_3 = 4v_1 \Leftrightarrow v_1 \times r^2 = 4v_1 \Leftrightarrow v_1(r^2 - 4) = 0$$

Como $v_1 \neq 0$ vem $r^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow r^2 = 4$ e como a progressão é não monótona, r terá de ser negativo, pelo que $r = -2$.

16.2 Determina o termo geral da progressão.

$$v_5 = 48 \Leftrightarrow v_1 \times r^4 = 48 \Leftrightarrow v_1 \times (-2)^4 = 48 \Leftrightarrow v_1 = 3$$

$$\text{Termo geral: } v_n = v_1 \times r^{n-1} = 3 \times (-2)^{n-1}$$

16.3 Determina $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 - (v_1 + v_2 + \dots + v_n) = -2048$.

$$1 - \sum_{k=1}^n v_k = -2048 \Leftrightarrow 1 - v_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = -2048 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 3 \times \frac{1-(-2)^n}{1+2} = -2048 \Leftrightarrow 1 - 1 + (-2)^n = -2048 \Leftrightarrow (-2)^n = -2048 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-2)^n = (-2)^{11} \Leftrightarrow n = 11$$

17. Seja x_n , uma progressão geométrica em que o primeiro termo e a razão são iguais a $\sqrt{5}$.

17.1 Determina o termo geral da progressão.

$$x_n = x_1 \times r^{n-1} = \sqrt{5} \times (\sqrt{5})^{n-1} = (\sqrt{5})^n$$

17.2 Seja $x_p = 625$. Determina o valor de $x_1 + x_2 + \dots + x_p$.

Apresenta a tua resposta na forma $a + b\sqrt{5}$, com a e b naturais.

$$\begin{aligned} x_p = 625 &\Leftrightarrow (\sqrt{5})^p = 625 \Leftrightarrow \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^p = 5^4 \Leftrightarrow 5^{\frac{p}{2}} = 5^4 \Leftrightarrow \frac{p}{2} = 4 \Leftrightarrow p = 8 \\ \sum_{k=1}^8 x_k &= x_1 \times \frac{1-r^8}{1-r} = \sqrt{5} \times \frac{1-(\sqrt{5})^8}{1-\sqrt{5}} = \sqrt{5} \times \frac{1-5^4}{1-\sqrt{5}} = \\ &= \sqrt{5} \times \frac{-624}{1-\sqrt{5}} = \frac{-624\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \frac{-624\sqrt{5}(1+\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} = \frac{-624\sqrt{5}-624 \times 5}{1-5} = \\ &= \frac{-3120-624\sqrt{5}}{-4} = 780 + 156\sqrt{5} \end{aligned}$$

18. Seja a_n , uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$ e seja b_n a sucessão tal que $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = 4^{a_n}$

18.1 Justifica que b_n é uma progressão geométrica.

Tem-se, para qualquer n natural: $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{4^{a_{n+1}}}{4^{a_n}} = 4^{a_{n+1}-a_n} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$
Portanto, (b_n) é uma progressão geométrica de razão 2.

18.2 Determina o valor de a_1 , sabendo que $b_1 + b_2 + \dots + b_{10} = 16\,368$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} b_k &= 16368 \Leftrightarrow b_1 \times \frac{1-r^{10}}{1-r} = 16368 \Leftrightarrow b_1 \times \frac{1-2^{10}}{1-2} = 16368 \Leftrightarrow b_1 = 16 \\ \text{Mas } b_1 &= 4^{a_1} \text{ pelo que } 4^{a_1} = 16 \Leftrightarrow 4^{a_1} = 4^2 \Leftrightarrow a_1 = 2. \end{aligned}$$

19. Seja u_n , uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$.

Sejam p e q números naturais, com $p < q$.

Sabe-se que $\frac{u_p}{u_q} = 243$ e que $u_p + u_{p+1} + \dots + u_q = 91$

Determina o valor de u_p .

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{u_p}{u_q} = 243 \\ \sum_{k=p}^q u_k = 91 \\ r = \frac{1}{3} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{u_p}{u_p \times r^{q-p}} = 243 \\ u_p \times \frac{1 - r^{q-p+1}}{1 - r} = 91 \\ r = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{r^{q-p}} = 243 \\ u_p \times \frac{1 - r^{q-p} \times r}{1 - r} = 91 \\ r = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r^{q-p} = \frac{1}{243} \\ u_p \times \frac{1 - \frac{1}{243} \times \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 91 \\ r = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_p \times \frac{364}{243} = 91 \\ r = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_p = \frac{243}{4} \\ r = \frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

20. Pela manhã, numa escola com 4095 alunos, um dos alunos diz a outro que a escola irá encerrar no período da tarde. Este último transmite, dez minutos depois, a notícia a outros dois alunos, e dez minutos depois, cada aluno tinha contado a outros dois.

Admitindo ser possível que isto se repita sucessivamente no mesmo espaço de tempo, e que os alunos tenham acesso a esta informação uma única vez, ao fim de 2 horas quantos alunos têm conhecimento de que a escola irá encerrar no período da tarde? Justifica a tua resposta.

Sendo a_n o número de alunos que ao fim de $10n$ minutos passa a saber da informação, tem-se:

$a_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$ (termo geral da progressão geométrica de razão igual a 2 e primeiro termo igual a 1).

Ao fim de 2 horas, 120 minutos (10×12), o número de alunos que sabem da informação é igual à soma dos 12 primeiros termos da progressão geométrica a_n , ou seja, $S_{12} = \frac{1-2^{12}}{1-2} = 4095$.

Em conclusão, ao fim de 2 horas, todos os alunos da escola têm conhecimento de que a escola irá encerrar no período da tarde.