



1. Considera a sucessão definida por $u_n = \frac{(-1)^n n}{2}$

$\sum_{n=1}^5 u_n$ é igual a:

- (A) $-\frac{3}{2}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{5}{2}$ (D) $-\frac{5}{2}$

$$u_n = \frac{(-1)^n \times n}{2}$$

$$\sum_{n=1}^5 u_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{2}{2} - \frac{3}{2} + \frac{4}{2} - \frac{5}{2} = \frac{6}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{3}{2}$$

Resposta: (A)

2. De uma sucessão sabe-se que $v_{n+1} - v_n = n^2 + 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Então pode afirmar-se que:

- (A) $v_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ (B) v_n é decrescente
(C) $v_5 < v_4$ (D) $v_2 = 2 + v_1$

Se $v_{n+1} - v_n = n^2 + 1, \forall n \in \mathbb{N}$, podemos concluir que:

- (v_n) é estritamente crescente pois $n^2 + 1 > 0, \forall n \in \mathbb{N}$
- $v_{n+1} = v_n + n^2 + 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Então para $n = 1$ vem $v_2 = v_1 + 1^2 + 1$ ou seja, $v_2 = 2 + v_1$.

Resposta: (D)

3. Sendo u_n uma sucessão de números reais qualquer, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) $u_n = u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ (B) $(-1)^{2n} \times u_n = u_n, \forall n \in \mathbb{N}$
(C) $u_{n+1} = u_n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$ (D) $u_{2n} = 2 \times u_n, \forall n \in \mathbb{N}$

Dado que $\forall n \in \mathbb{N}$, $2n$ representa um número par,

$$(-1)^{2n} = 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{Então } (-1)^{2n} \times u_n = 1 \times u_n = u_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Resposta: (B)

4. Seja a sucessão definida por $b_n = 2n + 3$

A soma $b_{3n} + b_{n+2}$ é representada por:

- (A) $6n + 3$ (B) $8n + 10$
(C) $8n + 6$ (D) $6n + 10$

$$b_n = 2n + 3$$

$$b_{3n} = 2 \times (3n) + 3 = 6n + 3$$

$$b_{n+2} = 2(n + 2) + 3 = 2n + 4 + 3 = 2n + 7$$

$$b_{3n} + b_{n+2} = (6n + 3) + (2n + 7) = 8n + 10$$

Resposta: (B)

5. Seja a sucessão definida por $u_n = \frac{3n+1}{1-2n}$

Qual dos seguintes números é termo da sucessão?

- (A) -1 (B) 1 (C) $-\frac{16}{9}$ (D) $\frac{37}{23}$

$$u_5 = \frac{3 \times 5 + 1}{1 - 2 \times 5} = \frac{15 + 1}{1 - 10} = \frac{16}{-9} = -\frac{16}{9}$$

Resposta: (C)

6. Sabendo que $-6 \leq a_n \leq 5, \forall n \in \mathbb{N}$

Qual das seguintes afirmações é necessariamente verdadeira?

- (A) $|a_n| \leq 5, \forall n \in \mathbb{N}$ (B) $|a_n| \leq 6, \forall n \in \mathbb{N}$
(C) $5 \leq |a_n| \leq 6, \forall n \in \mathbb{N}$ (D) $|a_n| \geq 5, \forall n \in \mathbb{N}$

$$-6 \leq a_n \leq 5, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow -6 \leq a_n \leq 6, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow |a_n| \leq 6, \forall n \in \mathbb{N}$$

Resposta: (B)

7. Acerca da sucessão a_n de termos:

$$-2, 2, -2, 2, -2, -2, \dots$$

Pode afirmar-se que:

(A) é limitada (B) o seu termo geral é $(-1)^{n+1} \times 2$

(C) o seu termo geral é $(-2)^n$ (D) é monótona

$$a_n = (-1)^n \times 2$$

(a_n) é limitada, dado que $-2 \leq a_n < 2, \forall n \in \mathbb{N}$.

Resposta: (A)

8. Sendo $v_n = (-1)^n + \frac{n+1}{n}$, tem-se que:

(A) $v_{n+1} - v_n = -2 + \frac{1}{n^2+n}$ se n é par (B) $v_{n+1} - v_n = 2 - \frac{1}{n^2+n}$ se n é par

(C) $v_{n+1} - v_n = \frac{2}{n^2+n}$ se n é ímpar (D) $v_{n+1} - v_n = 2 - \frac{1}{n^2+n}$ se n é ímpar

$$v_n = (-1)^n + \frac{n+1}{n}$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (-1)^{n+1} + \frac{n+1+1}{n+1} - (-1)^n - \frac{n+1}{n} \\ &= (-1)^{n+1} - (-1)^n + \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} \\ &= (-1)^{n+1} + (-1)(-1)^n + \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)} \\ &= (-1)^{n+1} + (-1)^{n+1} + \frac{-1}{n^2+n} \\ &= 2 \times (-1)^{n+1} - \frac{1}{n^2+n} \end{aligned}$$

Logo

$$v_{n+1} - v_n = -2 - \frac{1}{n^2+n} \text{ se } n \text{ é par } (n+1 \text{ é ímpar})$$

$$v_{n+1} - v_n = 2 - \frac{1}{n^2+n} \text{ se } n \text{ é ímpar } (n+1 \text{ é par})$$

Resposta: (D)

9. O conjunto C é um conjunto de números reais.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) Se C é limitado, então é finito.
- (B) Se C é finito, então limitado.
- (C) Se C é infinito, então não é limitado.
- (D) Se C tem um majorante, então tem minorante.

(A) e (C) são falsas. Por exemplo $C =]0, 1[$ é limitado e infinito.

(D) é falsa. Por exemplo $C =]-\infty, 1[$ é majorado e não minorado.

Resposta: (B)

10. Dadas as sucessões, definidas por:

$$a_n = (-1)^n \times \frac{1}{n} ; \quad b_n = \frac{n^2}{100} ; \quad c_n = \cos(n\pi) \text{ e } d_n = \frac{n-1}{2n}$$

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) As quatro sucessões são limitadas.
- (B) Nenhuma das sucessões é limitada.
- (C) Nenhuma das sucessões é monótona.
- (D) Duas das sucessões são monótonas.

(A) é falsa pois (b_n) não é limitada.

(B) é falsa. Por exemplo, (a_n) é limitada dado que

$$-1 \leq (-1)^n \times \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(C) é falsa. Por exemplo, (b_n) é estritamente crescente dado que

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{(n+1)^2}{100} - \frac{n^2}{100} = \frac{1}{100} (n^2 + 2n + 1 - n^2) \\ &= \frac{2n+1}{100} > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

(D) é verdadeira.

$$\begin{aligned} d_{n+1} - d_n &= \frac{(n+1)-1}{2(n+1)} - \frac{n-1}{2n} = \frac{n}{2(n+1)} - \frac{n-1}{2n} \\ &= \frac{n^2 - (n-1)(n+1)}{2n(n+1)} = \frac{n^2 - (n^2 - 1)}{2n(n+1)} \\ &= \frac{1}{2n(n+1)} > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Logo, (d_n) é estritamente crescente.

(b_n) e (d_n) são monótonas.

Resposta: (D)

11. Considera a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x & \text{se } x \leq 1 \\ 5x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Seja a_n a sucessão definida por $a_n = f\left(n - \frac{1}{n}\right)$.

Qual das seguintes expressões define o termo da sucessão a_n ?

- (A) $5n - \frac{1}{n}$ (B) $n^2 - \frac{6}{n}$ (C) $5n - \frac{5}{n}$ (D) $n - \frac{1}{n}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & \text{se } x \leq 1 \\ 5x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$a_n = f\left(n - \frac{1}{n}\right)$$

- Se $n \geq 2$, $n - \frac{1}{n} > 1$ pelo que, para $n \geq 2$,

$$a_n = f\left(n - \frac{1}{n}\right) = 5\left(n - \frac{1}{n}\right) = 5n - \frac{5}{n}$$

- Se $n = 1$, $n - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{1} = 0 \leq 1$, pelo que

$$a_1 = f(0) = 0^2 - 0 = 0 = 5 \times 1 - \frac{5}{1}$$

$$\text{Logo, } a_n = 5n - \frac{5}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Resposta: (C)

12. O gráfico da sucessão a_n está contido numa parábola.

Então, pode afirmar-se que:

- (A) a_n , não é monótona (B) a_n , é monótona crescente
(C) a_n , é limitada (D) a_n , pode ser monótona decrescente

Por exemplo, se $a_n = -n^2$, o gráfico de (a_n) é constituído por pontos de uma parábola e (a_n) é monótona decrescente.

Resposta: (D)

13. Acerca da sucessão u_n sabe-se que $\frac{u_2}{u_1} = 2$ e $\frac{u_3}{u_2} = 2$

Então, pode afirmar-se que:

- (A) a sucessão é monótona (B) a sucessão pode ser crescente
(C) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2$ (D) a sucessão não é limitada

Se $u_n = -2^n$,

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{-4}{-2} = 2, \quad \frac{u_3}{u_2} = \frac{-8}{-4} = 2 \text{ e } (u_n) \text{ é decrescente.}$$

Se $u_n = \begin{cases} -2^n & \text{se } n \leq 3 \\ \frac{1}{n} & \text{se } n > 3 \end{cases}$, verifica-se que apesar de $\frac{u_2}{u_1} = 2$

e $\frac{u_3}{u_2} = 2$, (A), (C) e (D) são falsas.

Resposta: (B)

14. Considera a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Seja a_n a sucessão definida por $a_n = f(n - 2)$

Indica qual das expressões seguintes define o termo geral de a_n

- (A) $-(n - 2)^2$ (B) $(n - 2)^2 - n$
(C) $-n + 2$ (D) $4 - 4n - n^2$

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$n - 2 > 0 \Leftrightarrow n > 2 \Leftrightarrow n \geq 3 \quad n \in \mathbb{N}$$

- Para $n \geq 3$,

$$a_n = f(n - 2) = (n - 2)^2 = n^2 - 4n + 4 = 4 - 4n + n^2$$

- $a_1 = f(1 - 2) = f(-1) = -(-1) = 1$

$$\text{Para } n = 1, 4 - 4n + n^2 = 4 - 4 + 1 = 1 = a_1$$

- $a_2 = f(2 - 2) = f(0) = -0 = 0$

$$\text{Para } n = 2, 4 - 4n + n^2 = 4 - 8 + 4 = 0 = a_2$$

Logo, $a_n = 4 - 4n + n^2, \forall n \in \mathbb{N}$

Resposta: (D)

15. Escreve uma expressão do termo geral de cada uma das sucessões, cujos primeiros termos se apresentam, admitindo que os restantes termos seguem a lei de formação sugerida.

15.1 $-2, -2, -2, -2, \dots$

15.2 $4, 8, 12, 16, \dots$

15.3 $-1, 1, -1, 1, -1, \dots$

15.4 $\frac{3}{10}, \frac{5}{20}, \frac{7}{30}, \frac{9}{40}, \dots$

15.5 $1, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{9}, \frac{1}{8}, \dots$

15.6 $2, 7, 4, 7, 6, 7, \dots$

15.7 $3, -4, 5, -6, 7, \dots$

15.8 $\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{9}, \dots$

16. Considera a sucessão de termo geral $a_n = -n^2 + 2n$.

- 16.1 Calcula a soma dos três primeiros termos.

$$a_1 + a_2 + a_3 = (-1 + 2) + (-4 + 4) + (-9 + 6) = 1 + 0 - 3 = -2$$

- 16.2 Verifica se -8 é termo da sucessão.

$$a_n = -8 \Leftrightarrow -n^2 + 2n = -8 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 8 = 0$$

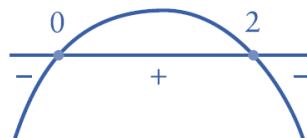
$$\Leftrightarrow n = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} \Leftrightarrow n = \frac{2 \pm 6}{2} \Leftrightarrow n = 4 \vee n = -2$$

$$a_4 = -8$$

- 16.3 A partir de que ordem são negativos os termos da sucessão?

$$a_n < 0 \Leftrightarrow -n^2 + 2n < 0 \Leftrightarrow n(-n + 2) < 0$$

$n \in \mathbb{N}$
 $\Leftrightarrow n > 2$

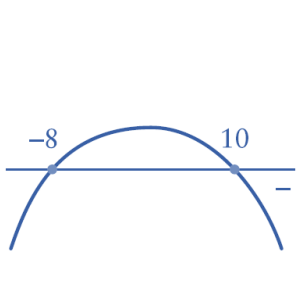


A partir do terceiro termo (inclusive).

- 16.4 Determina n de modo que $a_n \leq -80$.

$$a_n \leq -80 \Leftrightarrow -n^2 + 2n \leq -80$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 2n - 80 \geq 0$$



C.A.

$$n^2 - 2n - 80 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 320}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{2 \pm 18}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = -8 \vee n = 10$$

Como $n \in \mathbb{N}$, vem $a_n \leq -80 \Leftrightarrow n \geq 10$

17. Observa a sequência de números pentagonais 1, 5, 12, 22, 35, 51, ...

17.1 Sendo a_n o número pentagonal de ordem n , verifica que, para $n \leq 4$, se tem

$$a_n = \frac{3n^2 - n}{2} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 3n - 2, \forall n \geq 2 \end{cases}$$

$$a_n = \frac{3n^2 - n}{2} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 3n - 2, \forall n \geq 2 \end{cases}$$

$$a_1 = \frac{3 \times 1 - 1}{2} = 1 \quad \text{ou} \quad a_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{3 \times 4 - 2}{2} = 5 \quad \text{ou} \quad a_2 = 1 + 3 \times 2 - 2 = 5$$

$$a_3 = \frac{3 \times 9 - 3}{2} = 12 \quad \text{ou} \quad a_3 = 5 + 3 \times 3 - 2 = 12$$

$$a_4 = \frac{3 \times 16 - 4}{2} = 22 \quad \text{ou} \quad a_4 = 12 + 3 \times 4 - 2 = 22$$

17.2 Admitindo que as igualdades apresentadas também são válidas para $n > 4$, verifica se há na sequência um número 145.

$$\begin{aligned} a_n = 145 &\Leftrightarrow \frac{3n^2 - n}{2} = 145 \Leftrightarrow 3n^2 - n = 290 \\ &\Leftrightarrow 3n^2 - n - 290 = 0 \quad \Leftrightarrow n = 10 \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

A figura n.º 10 tem 145 pontos.

18. Estuda quanto à monotonia a sucessão definida por $a_n = \frac{1}{n+2}$

19. Considera a sucessão de termo geral

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \leq 2 \\ \frac{n+1}{n} & \text{se } n > 2 \end{cases}$$

19.1 A sucessão é monótona? Justifica.

19.2 A sucessão é limitada? Justifica.

20. Estuda quanto à monotonia as sucessões definidas por:

20.1 $a_n = \frac{1}{n+2} - 3$

20.2 $b_n = (-1)^n \times 3n + 1$



$$a_n = \frac{1}{n+2} - 3$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+3} - 3 - \left(\frac{1}{n+2} - 3 \right) = \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2} \\ = \frac{n+2-n-3}{(n+2)(n+3)} = \frac{-1}{(n+2)(n+3)}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-1}{(n+2)(n+3)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

(a_n) é estritamente decrescente.

$$a_n = (-1)^n \times 3n + 1$$

$$a_1 = (-1)^1 \times 3 + 1 = -3 + 1 = -2$$

$$a_2 = (-1)^2 \times 6 + 1 = 7$$

$$a_3 = (-1)^3 \times 9 + 1 = -8$$

$$a_1 = -2, a_2 = 7, a_3 = -8; a_2 > a_1 \text{ e } a_3 < a_2$$

(a_n) não é monótona.

20.3 $c_n = -2 + 3(n-1)^2$

$$a_n = -2 + 3(n-1)^2$$

$$a_{n+1} - a_n = -2 + 3(n+1-1)^2 - (-2 + 3(n-1)^2) \\ = -2 + 3n^2 + 2 - 3(n^2 - 2n + 1) \\ = 3n^2 - 3n^2 + 6n - 3 \\ = 3(2n-1)$$

$$a_{n+1} - a_n = 3(2n-1) > 0, \forall n \in \mathbb{N}; (a_n) \text{ é estritamente crescente.}$$

20.4 $d_n = \begin{cases} 3n-1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 3n-2 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

$$a_n = \begin{cases} 3n-1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 3n-2 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Se n é ímpar, $n+1$ é par.

Se n é par, $n+1$ é ímpar.

Então

- Se n é ímpar

$$a_{n+1} - a_n = 3(n+1) - 2 - (3n-1) \\ = 3n+3-2-3n+1 = 2$$

- Se n é par

$$a_{n+1} - a_n = 3(n+1) - 1 - (3n-2) \\ = 3n+3-1-3n+2 = 4$$

$$a_{n+1} - a_n = \begin{cases} 2 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 4 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$a_{n+1} - a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}; (a_n) \text{ é estritamente crescente.}$$

20.5 $e_n = n^2 - 6n$

$$a_n = n^2 - 6n$$

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - 6(n+1) - n^2 + 6n \\ = n^2 + 2n + 1 - 6n - 6 - n^2 + 6n = 2n - 5$$

$$a_{n+1} - a_n = 2n - 5;$$

$$n \leq 2 \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n < 0;$$

$$n > 3 \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n > 0; (a_n) \text{ não é monótona.}$$

20.6 $f_n = 1 + |2n - 11|$

$$a_n = 1 + |2n - 11|$$

$$2n - 11 = 0 \Leftrightarrow n = 5,5$$

$$a_4 = 1 + |2 \times 4 - 11| = 1 + 3 = 4$$

$$a_5 = 1 + |2 \times 5 - 11| = 1 + 1 = 2$$

$$a_6 = 1 + |2 \times 6 - 11| = 1 + 1 = 2$$

$$a_7 = 1 + |2 \times 7 - 11| = 1 + 3 = 4$$

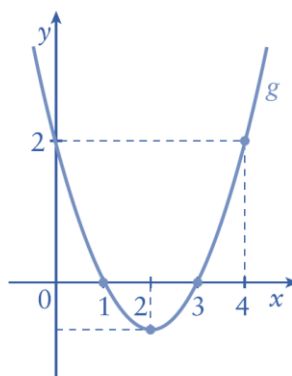
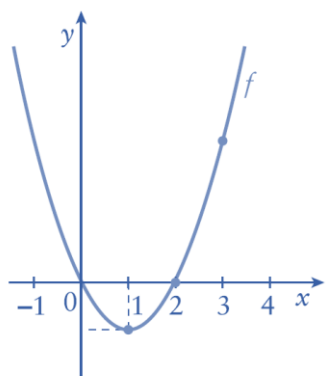
$$a_4 = 4, a_5 = a_6 = 2, a_7 = 4; a_5 < a_4 \text{ e } a_7 > a_6.$$

(a_n) não é monótona.

21. Considera as funções f e g , de domínio $\mathbb{R}$, definidas por

$$f(x) = x^2 - 2x \quad \text{e} \quad g(x) = x^2 - 4x + 3$$

12.1 Utiliza a calculadora gráfica e faz um esboço de cada uma das funções.



12.2 Utilizando 12.1, o que se pode concluir acerca da monotonia das sucessões u_n e v_n , sendo

$$u_n = n^2 - 2n \quad \text{e} \quad v_n = n^2 - 4n + 3$$

A restrição de f ao intervalo $[1, +\infty[$ é estritamente crescente.

Logo a restrição de f a $\mathbb{N}$ também é estritamente crescente.

(u_n) é estritamente crescente.

$$v_1 = f(1) = 0$$

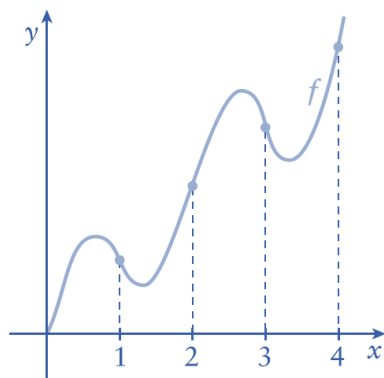
$$v_2 = f(2) = -1$$

$$v_3 = f(3) = 0$$

$v_2 < v_1$ e $v_3 > v_2$; (v_n) não é monótona.

12.3 Se soubermos que a sucessão $f(n)$ é monótona, podemos concluir que a função $f(x)$, real de variável real, definida pela mesma expressão algébrica é monótona? Justifica utilizando um gráfico.

A sucessão definida por $n \mapsto f(n)$ pode ser monótona sem que a função definida em $\mathbb{R}$ por $x \mapsto f(x)$ o seja como se ilustra no gráfico seguinte:



22. Uma sucessão a_n satisfaz a seguinte condição $a_{n+1} - a_n = 3n^2 - 15n + 18$

22.1 O que podes concluir quanto à monotonia da sucessão?

$$a_{n+1} - a_n = 3n^2 - 15n + 18$$

$$3n^2 - 15n + 18 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 12 \times 18}}{6}$$

$$\Leftrightarrow n = 2 \vee n = 3$$

$$a_{n+1} - a_n = 3(n-2)(n-3) \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

(a_n) é monótona crescente.

22.2 A sucessão tem três termos iguais a zero.

Qual a ordem desses termos?

Explica o teu raciocínio.

$$a_{n+1} - a_n = 0 \Leftrightarrow 3(n-2)(n-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow n = 2 \vee n = 3$$

$$a_{n+1} - a_n = 0 \Leftrightarrow n = 2 \vee n = 3$$

$$a_{n+1} = a_n \Leftrightarrow n = 2 \vee n = 3$$

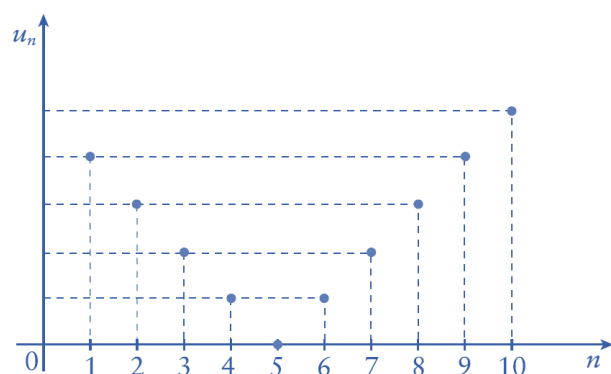
$$a_3 = a_2 \text{ e } a_4 = a_3$$

A sucessão (a_n) só tem três termos iguais: $a_2 = a_3 = a_4$.

Logo, se tem três termos nulos só poderá ser $a_2 = a_3 = a_4 = 0$.

23. Escreve o termo geral de um sucessão que seja crescente a partir do 5.º termo e que $u_5 < u_4$

Por exemplo:



$$u_n = |n - 5| \text{ (por exemplo)}$$

24. É dada a sucessão de termo geral $a_n = 1 - \frac{3}{2n}$

24.1 Justifica que a sucessão é crescente.

$$a_{n+1} - a_n = 1 - \frac{3}{2(n+1)} - \left(1 - \frac{3}{2n}\right) = \frac{3}{2n} - \frac{3}{2(n+1)} = \frac{3n+3-3n}{2n(n+1)}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3}{2n(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

(a_n) é estritamente crescente.

24.2 Mostra que a sucessão é limitada.

$$0 < \frac{3}{2n} \leq \frac{3}{2}$$

$$-\frac{3}{2} \leq -\frac{3}{2n} < 0$$

$$1 - \frac{3}{2} \leq 1 - \frac{3}{2n} < 1$$

$$-\frac{1}{2} \leq a_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

25. Das sucessões seguintes definidas pelo seu termo geral, indica, justificando, as que são limitadas.

25.1 $a_n = 3 + \frac{2}{n}$

$$a_n = 3 + \frac{2}{n}$$

$$0 < \frac{2}{n} \leq 2 \iff 3 < 3 + \frac{2}{n} \leq 3 + 2$$

$$3 < a_n \leq 5, \forall n \in \mathbb{N}; (a_n) \text{ é limitada.}$$

25.2 $b_n = (-1)^n \times 3$

$$b_n = (-1)^n \times 3$$

$$b_n = \begin{cases} 3 & \text{se } n \text{ é par} \\ -3 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$$-3 \leq b_n \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}; (b_n) \text{ é limitada.}$$

25.3 $c_n = (-1)^n \times \frac{\pi}{n}$

$$c_n = (-1)^n \times \frac{\pi}{n} = \begin{cases} \frac{\pi}{n} & \text{se } n \text{ é par} \\ -\frac{\pi}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Para n par

$$0 < \frac{\pi}{n} \leq \frac{\pi}{2}$$

Para n ímpar

$$0 < \frac{\pi}{n} \leq \pi \Leftrightarrow -\pi \leq -\frac{\pi}{n} < 0$$

Então, $-\pi \leq c_n \leq \frac{\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$; (c_n) é limitada.

25.4 $d_n = 4 + \frac{n+1}{n}$

$$d_n = 3 + \frac{n+1}{n} = 3 + 1 + \frac{1}{n} = 4 + \frac{1}{n}$$

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Leftrightarrow 4 < 4 + \frac{1}{n} \leq 4 + 1$$

$4 < d_n \leq 5$, $\forall n \in \mathbb{N}$; (d_n) é limitada.

25.5 $e_n = 6 - (-1)^n \times \frac{1}{n}$

$$e_n = 6 - (-1)^n \times \frac{1}{n} = \begin{cases} 6 - \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \\ 6 + \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

• Para n par

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{n} < 0$$

$$\Leftrightarrow 6 - \frac{1}{2} \leq 6 - \frac{1}{n} < 6$$

$$\frac{11}{2} \leq e_n < 6$$

• Para n ímpar

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Leftrightarrow 6 < 6 + \frac{1}{n} \leq 6 + 1$$

$$6 < e_n \leq 7$$

Então, $\frac{11}{2} \leq e_n \leq 7$, $\forall n \in \mathbb{N}$; (e_n) é limitada.

25.6 $f_n = \frac{2-n}{n}$



$$f_n = \frac{2-n}{n} = \frac{2}{n} - 1$$

$$0 < \frac{2}{n} \leq \frac{2}{1} \Leftrightarrow -1 < \frac{2}{n} - 1 \leq 1$$

$-1 < f_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}; (f_n)$ é limitada

$$25.7 \quad g_n = \frac{4n+6}{2n+1}$$

$$g_n = \frac{4n+5}{2n+1} + \frac{4n+5}{-4n-2} \cdot \frac{2n+1}{2}$$

$$g_n = 2 + \frac{3}{2n+1}$$

$$0 < \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{2 \times 1 + 1}$$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{3}{2n+1} \leq \frac{3}{3} \Leftrightarrow 2 < 2 + \frac{3}{2n+1} \leq 2 + 1$$

$2 < g_n \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}; (g_n)$ é limitada.

$$25.8 \quad h_n = \begin{cases} n+1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 3 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$h_n = \begin{cases} n+1 & \text{se } n \text{ é par} \\ 3 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

(h_n) não é limitada porque o conjunto dos termos de ordem par não é limitado.

$$25.9 \quad i_n = \begin{cases} 5 + \frac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ é par} \\ -1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$$i_n = \begin{cases} 5 + \frac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ é par} \\ -1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

• se n é par

$$0 < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{2^2} \Leftrightarrow 5 < 5 + \frac{1}{n^2} \leq 5 + \frac{1}{4}$$

$$5 < i_n \leq \frac{21}{4}$$

• se n é ímpar

$$i_n = -1$$

Então $-1 \leq i_n \leq \frac{21}{4}, \forall n \in \mathbb{N}; (i_n)$ é limitada.

$$25.10 \quad j_n = \text{sen}(n\pi)$$

$$j_n = \sin(n\pi) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

$j_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. (j_n) é constante, logo, é limitada.

26. Para cada uma das sucessões, definidas pelo seu termo geral, mostra analiticamente que é verdadeira a afirmação: $\exists L \in \mathbb{R}^+ \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| < L$

26.1 $u_n = \frac{\pi}{2n+1}$

$$u_n = \frac{\pi}{2n+1}$$

$$0 < \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{2n+1} \leq \frac{\pi}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Então, sendo $L > \frac{\pi}{3}$ tem-se $|u_n| < L, \forall n \in \mathbb{N}$.

26.2 $u_n = \begin{cases} 1000 & \text{se } n < 40 \\ 5 + (-1)^n \times 5 & \text{se } n \geq 40 \end{cases}$

$$u_n = \begin{cases} 1000 & \text{se } n < 40 \\ 5 + (-1)^n \times 5 & \text{se } n \geq 40 \end{cases}$$

Se $n < 40, u_n = 1000$.

Se $n \geq 40, u_n = 5 - 5$ ou $u_n = 5 + 5$.

Logo, o conjunto dos termos de (u_n) tem apenas três elementos: 0, 10 e 1000.

Logo, para $L > 1000, |u_n| < L, \forall n \in \mathbb{N}$.

26.3 $u_n = \begin{cases} 5 + \frac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{1-n}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

$$u_n = \begin{cases} 5 + \frac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{1-n}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$$u_n = \begin{cases} 5 + \frac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{1}{n} - 1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Para n par:

$$0 < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{2^2} \Leftrightarrow 5 < 5 + \frac{1}{n^2} \leq 5 + \frac{1}{4}$$

$$5 < u_n \leq \frac{21}{4}$$

Para n ímpar

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{1}{n} - 1 \leq 0$$

$$-1 < u_n \leq 0$$

Logo, $-1 < u_n \leq \frac{21}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, para $L > \frac{21}{4}, |u_n| < L, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$26.4 \quad u_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \geq 10 \\ 5 - n^2 & \text{se } n < 10 \end{cases}$$

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \geq 10 \\ 5 - n^2 & \text{se } n < 10 \end{cases}$$

Para $n \geq 10, u_n = 1$

Para $n < 10$

$$5 - 9^2 \leq u_n \leq 5 - 1^2$$

$$-59\,044 \leq u_n \leq 4$$

Então, para $L > 59\,044, |u_n| < L, \forall n \in \mathbb{N}$.

27. Acerca de uma sucessão a_n , sabe-se que é crescente e que todos os seus termos são inferiores a 1000.

A sucessão é limitada? Justifica.

a_n é crescente $\Rightarrow a_n \geq a_1, \forall n \in \mathbb{N}$

$a_1 \leq a_n < 1000, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (a_n)$ é limitada.

28. Considera a sucessão de termo geral $u_n = \frac{2n^2+6}{4}$

28.1 Verifica que 51,5 é um termo da sucessão.

$$\begin{aligned} u_n = 51,5 &\Leftrightarrow \frac{2n^2+6}{4} = 51,5 \\ &\Leftrightarrow 2n^2+6 = 206 \\ &\Leftrightarrow 2n^2 = 200 \Leftrightarrow n^2 = 100 \Leftrightarrow n = 10 \quad n \in \mathbb{N} \\ u_{10} &= 51,5 \end{aligned}$$

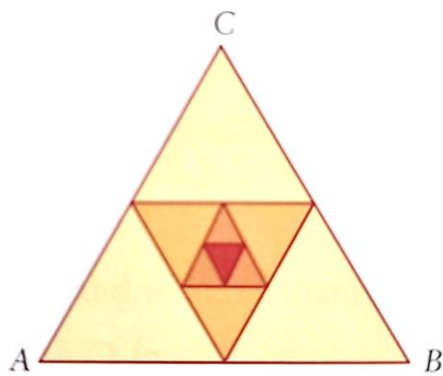
28.2 Determina o número de termos que são maiores do que 100 e menores do que 500.

$$\begin{aligned} u_n > 100 \wedge u_n < 500 &\Leftrightarrow \frac{2n^2+6}{4} > 100 \wedge \frac{2n^2+6}{4} < 500 \\ &\Leftrightarrow 2n^2+6 > 400 \wedge 2n^2+6 < 2000 \\ &\Leftrightarrow n^2 > 197 \wedge n^2 < 997 \\ &\Leftrightarrow n > 14 \wedge n \leq 31 \quad n \in \mathbb{N} \\ 31 - 14 &= 17 \\ 17 &\text{ termos} \end{aligned}$$

28.3 A sucessão dada é limitada? Justifica.

(u_n) é a restrição da função quadrática definida por $f(x) = \frac{2x^2+6}{4}$ a $\mathbb{N}$. Logo, o conjunto dos termos de (u_n) não é majorado pelo que (u_n) não é limitada.

29. Na figura está representado, T_1 , um triângulo equilátero $[ABC]$, de área 1.



Unindo os pontos médios dos lados de T_1 obtém-se outro triângulo equilátero T_2 . Repetindo o processo obtém-se a sucessão dos triângulos T_n que a figura sugere.

29.1 Define por recorrência a sucessão a_n das áreas dos triângulos T_n .

A área de T_2 é igual a $\frac{1}{4}$ da área do triângulo T_1 .

A área de T_{n+1} é igual a $\frac{1}{4}$ da área do triângulo T_n .

$$\text{Então } \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

29.2 A sucessão obtida em 29.1 é limitada? Justifica.

Sendo a_n a sucessão das áreas de T_n tem-se que $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, (a_n) é decrescente, pelo que $a_n \leq a_1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Como $a_1 = 1$, vem $0 < a_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. (a_n) é limitada.

30. Mostra que se a_n é uma sucessão limitada então $-\pi \times a_n$ também é limitada.

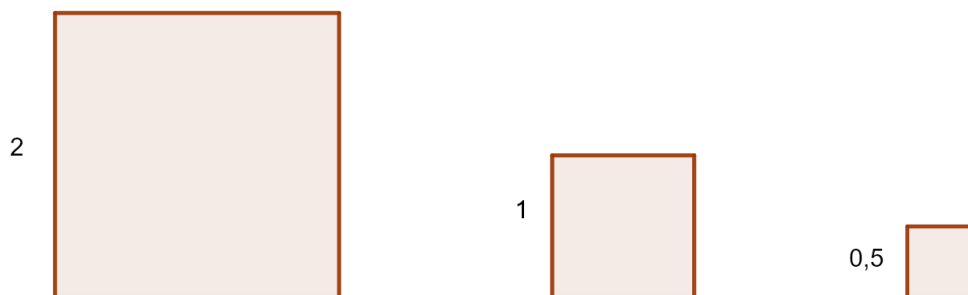
Se (a_n) é limitada, $\exists L, M \in \mathbb{R}: L < a_n < M, \forall n \in \mathbb{N}$

$L < a_n < M, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow -\pi M < -\pi \times a_n < -\pi \times L, \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (-\pi a_n)$ é uma sucessão limitada.

31. Observa a sucessão das figuras seguintes.



Admite que o lado do primeiro quadrado mede 2 cm ; o lado do segundo quadrado mede 1 cm ; o do terceiro quadrado 0,5 cm ; ... Cada quadrado, a partir do segundo, tem o comprimento do lado igual a metade do comprimento do lado do quadrado anterior.

31.1 Qual é a área do 5.º quadrado? E do 6.º quadrado?

$$a_1 = 2^2 = 4$$

$$a_2 = 1^2 = 1$$

$$a_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$a_4 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$a_5 = \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$$

$$a_6 = \left(\frac{1}{16}\right)^2 = \frac{1}{256}$$

$$\text{A área do 5.º quadrado é } \left(\frac{1}{8}\right)^2 \text{ cm}^2 = \frac{1}{64} \text{ cm}^2.$$

$$\text{A área do 6.º quadrado é } \left(\frac{1}{16}\right)^2 \text{ cm}^2 = \frac{1}{256} \text{ cm}^2.$$

31.2 Relativamente às áreas calculadas determina a razão entre a área do quadrado de ordem $n + 1$ e a área do quadrado de ordem n .

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_5}{a_4} = \frac{a_6}{a_5} = \frac{1}{4}$$

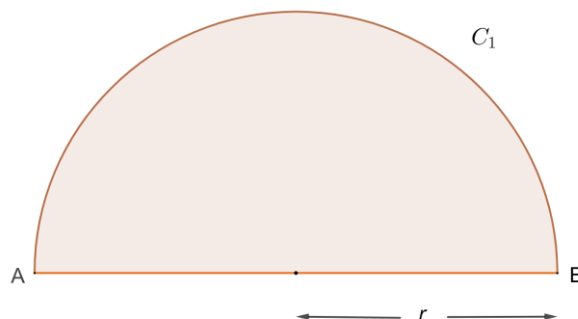
31.3 Define por recorrência a sucessão a_n em que o termo de ordem n é a área do n ésimo quadrado.

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

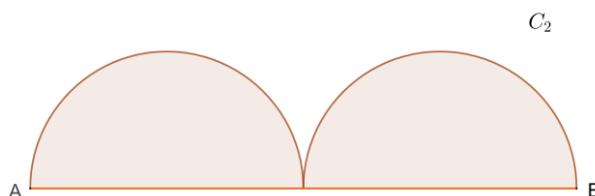
32. Observa as figuras seguintes construídas a partir de um segmento de reta $[AB]$.

Sabe-se que: $r = \frac{\overline{AB}}{2}$.

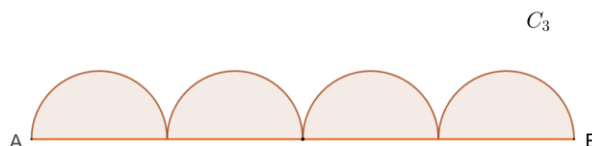
- A linha C_1 é uma semicircunferência de raio r .



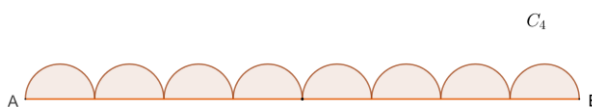
- A linha C_2 é formada por duas semicircunferências geometricamente iguais.



- A linha C_3 é formada por quatro semicircunferências geometricamente iguais.



- A linha C_4 é formada por oito semicircunferências geometricamente iguais.



31.1 Escreve em função de r , o comprimento das linhas:

a) C_1

$$C_1 = \frac{2\pi r}{2} = \pi r$$

$$C_1 = \pi r$$

b) C_2

$$R_2 = \frac{1}{2}r$$

$$C_2 = 2 \frac{2\pi r_2}{2} = 2\pi r_2 = 2\pi \times \frac{1}{2}r = \pi r$$

$$C_2 = \pi r$$

c) C_3

d) C_4

$$r_3 = \frac{1}{2} r_2 = \frac{1}{4} r$$

$$C_3 = 4 \times \frac{2\pi r_3}{2} = 4\pi r_3 = 4\pi \times \frac{1}{4} r = \pi r$$

$$C_3 = \pi r$$

$$r_4 = \frac{1}{2} r_3 = \frac{1}{8} r$$

$$C_4 = 8 \times \frac{2\pi r_4}{2} = 8\pi r_4 = 8\pi \times \frac{1}{8} r = \pi r$$

$$C_4 = \pi r$$

31.2 Determina a área definida pela linha e pelo segmento de reta $[AB]$, ou seja, a região representada a cor:

a) Na linha C_1 (A_1)

$$A_1 = \frac{\pi r^2}{2}$$

b) Na linha C_2 (A_2)

$$A_2 = 2 \times \frac{\pi(r_2)^2}{2} = \pi\left(\frac{1}{2}r\right)^2 = \frac{\pi r^2}{4}$$

$$A_2 = \frac{\pi r^2}{4}$$

c) Na linha C_3 (A_3)

$$A_3 = 4 \times \frac{\pi(r_3)^2}{2} = 2\pi\left(\frac{1}{4}r\right)^2 = \frac{\pi r^2}{8}$$

$$A_3 = \frac{\pi r^2}{8}$$

d) Na linha C_4 (A_4)

$$A_4 = 8 \times \frac{\pi(r_4)^2}{2} = 4\pi\left(\frac{1}{8}r\right)^2 = \frac{\pi r^2}{16}$$

$$A_4 = \frac{\pi r^2}{16}$$

31.3 Considera a sucessão A_n em que os quatro primeiros termos são A_1, A_2, A_3 e A_4 calculados em **31.2**.

Mantendo a regularidade definida, ou seja, cada figura a partir da segunda tem o dobro dos semicírculos da figura anterior, todos são geometricamente iguais e a soma dos correspondentes diâmetros é igual a $\overline{AB}$, define, por recorrência, esta sucessão que se designou por A_n .

$$\begin{cases} A_1 = \frac{\pi r^2}{2} \\ A_{n+1} = \frac{1}{2} A_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

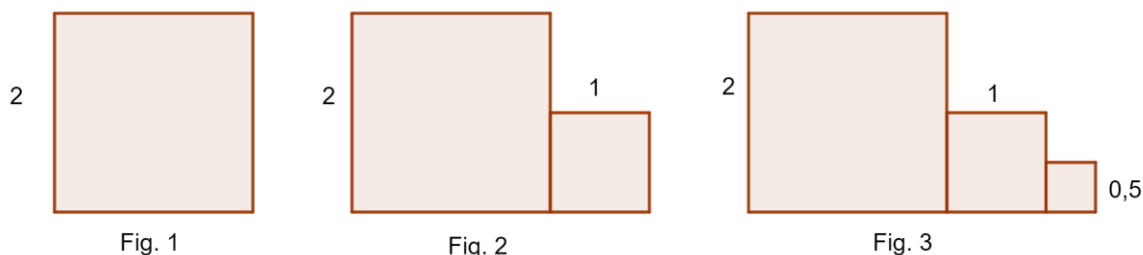
31.4 Qual será o 6.º termo da sucessão definida em **31.4**

$$A_5 = \frac{1}{2} A_4 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi r^2}{16} = \frac{\pi r^2}{32}$$

$$A_6 = \frac{1}{2} A_5 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi r^2}{32} = \frac{\pi r^2}{64}$$

$$A_6 = \frac{\pi r^2}{64}$$

33. Observa a sucessão das figura seguintes:



Admite que a figura 1 é um quadrado cujo lado mede 2 cm ; a figura 2 é formada por dois quadrados, um com 2 cm de lado e o outro com 1 cm de lado ; a figura 3 é formada por três quadrados com 2 cm , 1 cm e 0,5 cm de lado, respetivamente.

Admite que se mantém a regularidade descrito na formação das figuras seguintes e designa por a_n a área, em centímetros quadrados, da figura de ordem n .

33.1 Determina a_1 , a_2 e a_3 .

$$a_1 = 2^2 = 4$$

$$a_2 = 4 + 1^2 = 5$$

$$a_3 = 5 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{4}$$

$$a_1 = 4; a_2 = 5; a_3 = \frac{21}{4}.$$

33.2 Verifica que a razão entre as áreas consecutivas não é constante.

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{5}{4}; \frac{a_3}{a_2} = \frac{21}{4} : 5 = \frac{21}{20}$$

$$\frac{5}{4} \neq \frac{21}{20}$$

33.3 Define por recorrência a sucessão a_n .

$$a_1 = 4, a_2 = a_1 + 1^2, a_3 = a_2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2, a_4 = a_3 + \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$a_1 = 4; a_2 = a_1 + \frac{1}{4^0}; a_3 = a_2 + \frac{1}{4^1}; a_4 = a_3 + \frac{1}{4^2}$$

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{4^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

34. Considera C um semicírculo de diâmetro $[AB]$ sendo $\overline{AB} = 20$ cm.

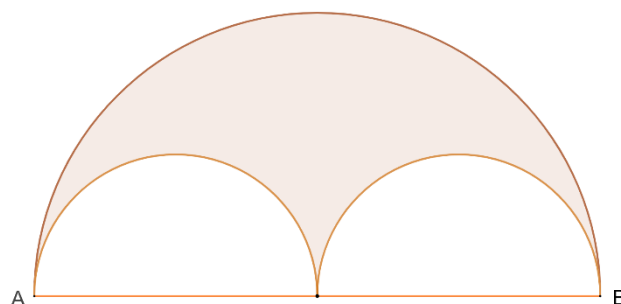
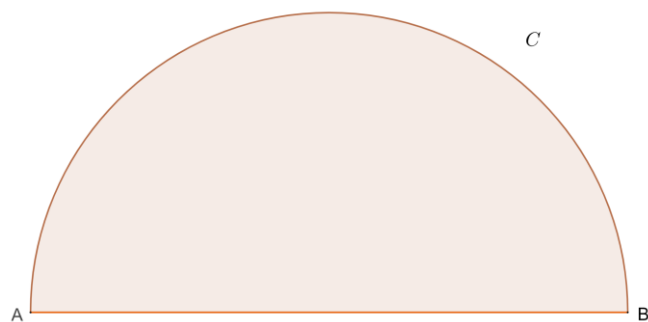


Fig. 1

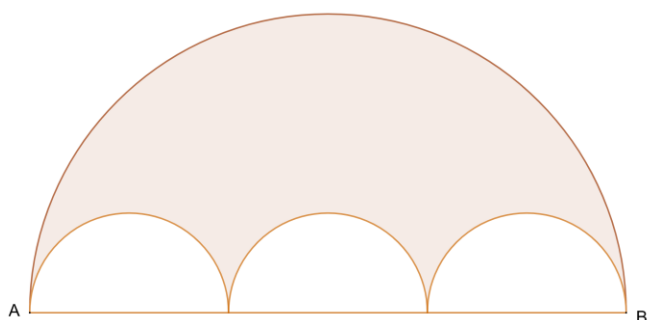


Fig. 2

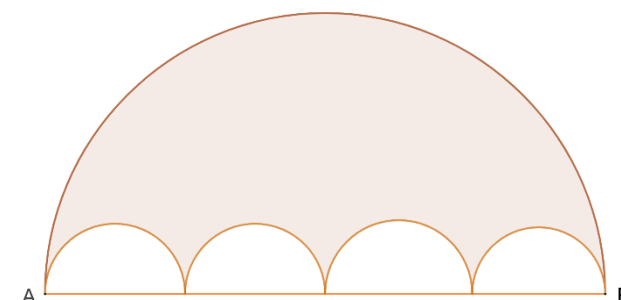


Fig. 3

Para obter a figura 1 dividiu-se o segmento de reta $[AB]$ em duas partes iguais e desenharam-se dois semicírculos em que o diâmetro de cada um é metade do comprimento de $[AB]$.

Para obter a figura 2 dividiu-se o segmento de reta $[AB]$ em três partes iguais e desenharam-se três semicírculos em que o diâmetro é a terça parte do comprimento de $[AB]$.

Para obter a figura 3 dividiu-se o segmento de reta $[AB]$ em quatro partes iguais e desenharam-se quatro semicírculos cujo diâmetro é a quarta parte do comprimento de $[AB]$.

Considera a_1, a_2, a_3 e a_n a área da região colorida a vermelho, respetivamente das figuras 1, 2, 3 e n

34.1 Determina o valor exato de a_1, a_2 e a_3 .

$$\overline{AB} = 20; r = 10$$

$$r_1 = \frac{10}{2} = 5$$

$$a_1 = \frac{\pi \times 10^2}{2} - 2 \times \frac{\pi \times 5^2}{2} = 50\pi - 25\pi = 25\pi$$

$$r_2 = \frac{1}{2} \times \frac{20}{3} = \frac{10}{3}$$

$$a_2 = 50\pi - 3 \times \frac{\pi \times \left(\frac{10}{3}\right)^2}{2} = 50\pi - \frac{3}{2} \times \pi \times \frac{100}{9} = 50\pi - \frac{50\pi}{3} = \frac{100\pi}{3}$$

$$r_3 = \frac{1}{2} \times \frac{20}{4} = \frac{5}{2}$$

$$a_3 = 50\pi - 4 \times \frac{\pi \times \left(\frac{5}{2}\right)^2}{2} = 50\pi - 2\pi \times \frac{25}{4} = 50\pi - \frac{25\pi}{2} = \frac{75\pi}{2}$$

$$a_1 = 25\pi \text{ cm}^2; a_2 = \frac{100\pi}{3} \text{ cm}^2; a_3 = \frac{75\pi}{2} \text{ cm}^2.$$

34.2 Faça um esboço da figura 4 e calcula a_4 .



$$r_4 = \frac{1}{2} \times \frac{20}{5} = 2$$

$$a_4 = 50\pi - 5 \times \frac{\pi \times 2^2}{2} = 50\pi - 10\pi = 40\pi$$

$$a_4 = 40\pi \text{ cm}^2$$

34.3 Relativamente à figura n , divide-se o segmento de reta $[AB]$ em $n + 1$ partes iguais desenham-se $n + 1$ semicírculos iguais.

Mostra que $a_n = 50\pi \times \frac{n}{n+1}$

$$r_n = \frac{1}{2} \times \frac{20}{n+1} = \frac{10}{n+1}$$

$$a_n = 50\pi - (n+1) \times \frac{\pi \times \left(\frac{10}{n+1}\right)^2}{2} = 50\pi - \frac{(n+1)}{2} \times \pi \times \frac{100}{(n+1)^2}$$

$$= 50\pi - 50\pi \times \frac{1}{n+1} = 50\pi \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 50\pi \times \frac{n+1-1}{n+1}$$

$$a_n = 50\pi \times \frac{n}{n+1}$$

34.4 Considera a sucessão referida em 34.3 e estuda-a quanto à monotonia.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 50\pi \frac{n+1}{n+1+1} - 50\pi \frac{n}{n+1} \\ &= 50\pi \left(\frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} \right) = 50\pi \times \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+2)(n+1)} \\ &= 50\pi \frac{1}{(n+2)(n+1)} = \frac{50\pi}{(n+2)(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{50\pi}{(n+2)(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

(a_n) é estritamente crescente.

34.5 A sucessão a_n é limitada? Justifica a tua resposta.

$$a_n \text{ é crescente} \Rightarrow a_n \geq a_1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \geq 25\pi, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a_n < \frac{\pi \times 10^2}{2}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n < 50\pi, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$25\pi \leq a_n < 50\pi, \forall n \in \mathbb{N}; (a_n) \text{ é limitada.}$$

34.6 Com a ajuda da calculadora gráfica calcula a_{100} e a_{1000} .

Efetua uma conjectura para o comportamento dos termos da sucessão a_n à medida que n tende para $+\infty$.

$$a_{100} = 50\pi \times \frac{100}{101} \approx 49,5\pi$$

$$a_{1000} = 50\pi \times \frac{1000}{1001} \approx 49,95\pi$$

À medida que n tende para $+\infty$ a área dos semicírculos tende para zero pelo que a área a_n tende para a área de C , isto é, para $50\pi \text{ cm}^2$.