

1. Prova que a sucessão de termo geral  $c_n = \frac{(-1)^n + n}{3n+2}$  converge para  $\frac{1}{3}$ . O facto de a sucessão ser convergente permite-nos concluir que é monótona?

Queremos mostrar que  $\lim c_n = \frac{1}{3}$

Seja  $\delta \in \mathbb{R}^+$ , então a partir de uma certa ordem  $p$  a partir da qual  $n \geq p \Rightarrow \left| c_n - \frac{1}{3} \right| < \delta$

$$\left| \frac{(-1)^n + n}{3n+2} - \frac{1}{3} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{3 \cdot (-1)^n + 3n - 3n - 2}{9n+6} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{3 \cdot (-1)^n - 2}{9n+6} \right| < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{9n+6} < \delta & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{1}{9n+6} < \delta & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9n+6 > \frac{5}{\delta} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 9n+6 > \frac{1}{\delta} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n > \frac{5}{9\delta} - \frac{2}{3} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ n > \frac{1}{9\delta} - \frac{2}{3} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Ora,  $\frac{5}{9\delta} - \frac{2}{3} > \frac{1}{9\delta} - \frac{2}{3}$ , portanto podemos considerar que  $p = \left( \frac{5}{9\delta} - \frac{2}{3} \right) + 1$  e afirmar que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left] \frac{1}{3} - \delta, \frac{1}{3} + \delta \right], \text{ assim conclui-se que } c_n \rightarrow \frac{1}{3}$$

No entanto  $c_1 = 0, c_2 = \frac{3}{8}$  e  $c_3 = \frac{2}{11}$ . Como  $c_1 < c_2$  e  $c_2 > c_3$  a função não é monótona.

O facto de ser convergente permite concluir que é limitada, mas não nos permite concluir que é monótona.

2. Considera a sucessão de termo geral  $u_n = \frac{3n+1}{n}$

2.1 Esta sucessão é monótona?

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3n+4}{n+1} - \frac{3n+1}{n} = \frac{3n^2+4n-3n^2-n-3n-1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, a sucessão é monótona decrescente.

2.2 A sucessão é limitada? Indica um majorante e um minorante, caso existam.

$$u_n = \frac{3n+1}{n} = \frac{3n}{n} + \frac{1}{n} = 3 + \frac{1}{n}.$$

Como a sucessão é decrescente o primeiro termo é um majorante.  $u_1 = 4$ .

$\frac{1}{n}$  é uma sucessão decrescente de termos positivos, um majorante é 1 e um minorante é 0.

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Leftrightarrow 3 < 3 + \frac{1}{n} \leq 4.$$

Portanto a sucessão é limitada porque  $\forall n \in \mathbb{N}, 3 < u_n \leq 4$

### 2.3 Mostra que a sucessão converge para 3.

Seja  $\delta \in \mathbb{R}^+$ , então a partir de uma certa ordem  $p$  a partir da qual  $n \geq p \Rightarrow |u_n - 3| < \delta$

$$\left| 3 + \frac{1}{n} - 3 \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{1}{n} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta}$$

Assim, basta considerar  $p = \frac{1}{\delta} + 1$  para que todos os termos da sucessão, com  $n \geq p$ , pertençam a  $V_\delta(3)$ , isto é,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n} = 3$ , pois

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow \left| \frac{3n+1}{n} - 3 \right| < \delta$$

3. Considera a sucessão definida por  $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{2n+1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$

#### 3.1 Calcula $u_5, u_{10}, u_{17}$ e $u_{50}$

$$u_5 = \frac{1}{5}; u_{10} = \frac{21}{10}; u_{17} = \frac{1}{17} \text{ e } u_{50} = \frac{101}{50}$$

#### 3.2 Mostra que a sucessão é limitada.

Para  $n$  par, temos que  $u_n = \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Leftrightarrow 2 < 2 + \frac{1}{n} \leq 3$$

Para  $n$  ímpar, temos

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1$$

Considerando os majorantes e minorantes dos termos de ordem par e ímpar concluímos que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq 2$ , logo é limitada.

**3.3** Mostra que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  e que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n} = 2$

A sucessão é convergente? Justifica a tua resposta.

Mostremos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

Seja  $\delta > 0$ .

$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta}$ , assim basta considerar  $p = \frac{1}{\delta} + 1$ , para que todos os termos da sucessão  $\frac{1}{n}$ , com  $n \geq p$  pertençam a  $V_\delta(0)$ , isto é,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , pois

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \delta$$

Mostremos agora que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n} = 2$

Seja  $\delta > 0$ .

$$\left| 2 + \frac{1}{n} - 2 \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta}$$

assim basta considerar  $p = \frac{1}{\delta} + 1$ , para que todos os termos da sucessão  $\frac{2n+1}{n}$ , com  $n \geq p$  pertençam a  $V_\delta(2)$ , isto é,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n} = 2$ , pois

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow \left| \frac{2n+1}{n} - 2 \right| < \delta$$

A sucessão não é convergente porque os termos de ordem par tendem para zero e os de ordem ímpar tendem para 2.

**4.** Seja  $a_n = \frac{5(n+1)}{3n}$

**4.1** Estuda a monotonia da sucessão.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{5(n+2)}{3n+3} - \frac{5n+5}{3n} = \frac{3n(5n+10) - (5n+5)(3n+3)}{3n(3n+3)} = \frac{15n^2 + 30n - 15n^2 - 30n - 15}{9n(n+1)} = \frac{-15}{9n(n+1)} = \frac{-5}{3n(n+1)} < 0$$

$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n < 0$ , logo a sucessão é monótona decrescente.

**4.2** Verifica se a sucessão é limitada. Indica um majorante e um minorante, caso existam.

$$\frac{5n+5}{3n} = \frac{5n}{3n} + \frac{5}{3n} = \frac{5}{3} + \frac{5}{3n}$$

$\frac{5}{3n}$  é o termo geral da sucessão decrescente de termos positivos. Logo o primeiro termo é um majorante e 0 é um minorante.

$$0 < \frac{5}{3n} \leq \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{5}{3} < \frac{5}{3} + \frac{5}{3n} \leq \frac{10}{3}, \text{ logo a sucessão é limitada porque } \forall n \in \mathbb{N}, \frac{5}{3} < a_n \leq \frac{10}{3}$$

Um majorante:  $\frac{10}{3}$

Um minorante:  $\frac{5}{3}$

**4.3** Prova, por definição, que  $\lim a_n = \frac{5}{3}$

$$\text{Seja } \delta > 0, \text{ tem-se } \left| \frac{5}{3} + \frac{5}{3n} - \frac{5}{3} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{5}{3n} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{5}{3n} < \delta \Leftrightarrow \frac{3n}{5} > \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow n > \frac{5}{3\delta}$$

Assim, dado  $\delta > 0$ , basta considerar  $p = \frac{5}{3\delta} + 1$  com  $p \in \mathbb{N}$  para que todos os termos da sucessão pertençam a  $V_\delta\left(\frac{5}{3}\right)$ , ou seja,  $\lim a_n = \frac{5}{3}$ , pois verifica-se que

$$\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow \left| a_n - \frac{5}{3} \right| < \delta$$

**5.** A sucessão definida por  $a_n = 2n - 1$ , tende para  $+\infty$ . Determina a menor ordem a partir da qual todos os termos da sucessão são maiores do que 50.

$$2n - 1 > 50 \Leftrightarrow 2n > 51 \Leftrightarrow n > \frac{51}{2}$$

A partir da ordem 26, inclusive, todos os termos são maior do que 50.

**6.** A sucessão definida por  $b_n = -n^2 + 1$  tende para  $-\infty$ . Determina a menor ordem a partir da qual todos os termos da sucessão são menores do que  $-960$ .

$$-n^2 + 1 < -960 \Leftrightarrow -n^2 < -961 \Leftrightarrow n^2 > 961 \underset{n>0}{\Leftrightarrow} n > \sqrt{961} \Leftrightarrow n > 31$$

A partir da ordem 32, inclusive, todos os termos são maiores do que  $-960$

7. Considera a sucessão definida por  $v_n = \frac{12n}{2n+1}$ .

7.1 Estuda-a quanto à monotonia.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{12n+12}{2n+3} - \frac{12n}{2n+1} = \frac{(12n+12)(2n+1) - 12n(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{24n^2 + 12n + 24n + 12 - 24n^2 - 36n}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{12}{(2n+3)(2n+1)}$$

Como  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} - v_n > 0$ , a sucessão é monótona crescente.

7.2 Haverá termos maiores do que 5 ? Investiga.

$$\frac{12n}{2n+1} > 5 \iff_{2n+1>0} 12n > 10n + 5 \iff 2n > 5 \iff n > \frac{5}{2}$$

A partir da ordem 3, inclusive, todos os termos são maiores do que 5.

7.3 A sucessão tende para  $+\infty$  ?

Sem calcular o limite, indica uma razão que justifica a tua resposta.

Vamos verificar se a sucessão é limitada.

Como  $v_n$  é crescente, então  $v_1 = \frac{12}{3} = 4$  é um minorante da sucessão.

Tem-se que

$$\begin{array}{r} 12n \\ -12n - 6 \\ \hline -6 \end{array} \quad \begin{array}{r} [2n + 1 \\ 6 \\ \hline 6 \end{array}$$

$$v_n = 6 - \frac{6}{2n+1}$$

Assim, a 6 vamos sempre retirando uma qualquer quantidade por muito pequena que seja.

Logo,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $4 \leq v_n < 6$ , isto é, a sucessão não tende para  $+\infty$ , pois é limitada.

8. Mostra que a sucessão definida por  $u_n = 2n + (-1)^n \times n$  não é monótona mas tem limite  $+\infty$ .

Monotonia:

$$u_1 = 2 \cdot 1 + (-1)^1 \cdot 1 = 1$$

$$u_2 = 2 \cdot 2 + (-1)^2 \cdot 2 = 6$$

$$u_3 = 2 \cdot 3 + (-1)^3 \cdot 3 = 3$$

A sucessão não é monótona, pois  $u_1 < u_2$  mas  $u_2 > u_3$

Limite  $+\infty$

Sabemos que  $\lim n = +\infty$

Logo,  $\forall L > 0, \exists p \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow n > L$  e portanto como para qualquer  $n$  natural

$$u_n = 2n + (-1)^n \times n \geq n$$

Temos também

$$\forall L > 0, \exists p \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow u_n > L$$

O que demonstra que  $\lim u_n = +\infty$

9. Da sucessão definida por:

$$u_n = \begin{cases} \frac{3}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ n & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

obteve-se uma sucessão  $v_n$  alterando apenas um número finito de termos.

Indica o limite, caso exista, da sucessão  $v_n$ .

Tem-se  $\lim n = +\infty$

Vamos mostrar, de seguida, que  $\lim \frac{3}{n} = 0$

Seja  $\delta > 0$ , tem-se  $\left| \frac{3}{n} - 0 \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{3}{n} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{3}{n} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{3}{\delta}$

Assim, para  $\delta > 0$ , basta considerar  $p = \frac{3}{\delta} + 1$  para que todos os termos da sucessão definida, com  $n \geq p$ , pertençam  $V_\delta(0)$ , ou seja,  $\lim \frac{3}{n} = 0$ , pois verifica-se que  $\forall \delta > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow \left| \frac{3}{n} - 0 \right| < \delta$

Assim,  $u_n$  não tem limite, pois os termos de ordem ímpar tendem para 0 e os termos de ordem par tendem para  $+\infty$ .

Qualquer sucessão  $v_n$  obtida a partir da sucessão  $u_n$  alterando um número finito de termos também não tem limite.

10. Considera as sucessões cujos termos gerais são:

$$u_n = 0,2n^2 \text{ e } v_n = 2,5n - 10$$

- 10.1 Mostra que estas sucessões tendem para  $+\infty$ .

$$u_n > L \Leftrightarrow 0,2n^2 > L \Leftrightarrow \frac{n^2}{5} > L \Leftrightarrow n^2 > 5L \Leftrightarrow_{n>0} n > \sqrt{5L}$$

Assim para cada  $L > 0$ , a partir de uma ordem  $p$  satisfazendo  $p > \sqrt{5L}$ , todos os termos da sucessão são superiores a  $L$ . Portanto,  $\lim u_n = +\infty$ .

$$u_n > L \Leftrightarrow 2,5n - 10 > L \Leftrightarrow 2,5n > L + 10 \Leftrightarrow n > \frac{2L}{5} + 4$$

Assim para cada  $L > 0$ , a partir de uma ordem  $p$  satisfazendo  $p > \frac{2L}{5} + 4$ , todos os termos da sucessão são superiores a  $L$ . Portanto,  $\lim u_n = +\infty$ .

- 10.2 A partir de que ordem os termos da sucessão  $u_n$  são maiores do que 5000 ?

Por 10.1, temos  $p > \sqrt{5 \cdot 5000} = 50\sqrt{10} \approx 158,1$ , ou seja, a partir da ordem 159, inclusive.

- 10.3 A partir de que ordem os termos da sucessão  $v_n$  são maiores do que 10 000 ?

Por 10.1, temos  $p > \frac{2 \cdot 10\,000}{5} + 4 = 4004$ , ou seja, a partir da ordem 4005, inclusive.

11. Na sucessão  $u_n$ , o primeiro termo é 1 e cada um dos termos seguintes obtém-se do anterior somando 1,5 :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 1,5 + u_{n-1}, n > 1 \end{cases}$$

- 11.1 Quais são os cinco primeiros termos da sucessão?

$$u_1 = 1 ; u_2 = 1,5 + 1 = 2,5 ; u_3 = 1,5 + 2,5 = 4 ; u_4 = 1,5 + 4 = 5,5 ; u_5 = 1,5 + 5,5 = 7$$

- 11.2 Esta sucessão é monótona?

$$u_n = 1,5 + u_{n-1} \Leftrightarrow u_n - u_{n-1} = 1,5$$

A sucessão é monótona crescente, pois  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n - u_{n-1} > 0$

- 11.3 Qual é o primeiro termo maior do que 10 ?

$$u_7 = 1,5 + 8,5 = 10 ; u_8 = 1,5 + 10 = 11,5$$

O primeiro termo superior a 10 é o oitavo termo,  $u_8$

**11.4** Prova que  $\lim u_n = +\infty$ .

Começa por obter o termo geral de  $u_n$

$$u_n = 1 + (n - 1) \cdot 1,5 = 1,5n - 0,5$$

Assim,

$$u_n > L \Leftrightarrow 1,5n - 0,5 > L \Leftrightarrow 1,5n > L + 0,5 \Leftrightarrow n > \frac{2L+1}{3}$$

Assim, para cada  $L > 0$ , a partir de uma ordem  $p$  satisfazendo  $p > \frac{2L+1}{3}$ , todos os termos da sucessão são superiores a  $L$ .

$$\forall L > 0, \exists p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow u_n > L$$

Portanto,  $\lim u_n = +\infty$