



Prova, por definição de limite, as afirmações seguintes.

1.1 $\lim(n - 2) = +\infty$

Mostremos que

$$\forall L > 0, \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow n - 2 > L:$$

$$n - 2 > L \Leftrightarrow n > L + 2$$

Assim, para cada $L > 0$, a partir de uma ordem p satisfazendo $p > L + 2$, todos os termos da sucessão são superiores a L . Portanto, $\lim(n - 2) = +\infty$

1.3 $\lim(5 - n) = -\infty$

Mostremos que

$$\forall L > 0, \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow 5 - n < -L:$$

$$5 - n < -L \Leftrightarrow -n < -L - 5 \Leftrightarrow n > L + 5$$

Assim, para cada $L > 0$, a partir de uma ordem p satisfazendo $p > L + 5$, todos os termos da sucessão são inferiores a $-L$. Portanto, $\lim(5 - n) = -\infty$

1.2 $\lim \frac{2}{n+2} = 0$

Seja $\delta > 0$. Tem-se:

$$\begin{aligned} \left| \frac{2}{n+2} - 0 \right| < \delta &\Leftrightarrow \left| \frac{2}{n+2} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{2}{n+2} < \delta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n+2 > \frac{2}{\delta} \Leftrightarrow n > \frac{2}{\delta} - 2 \end{aligned}$$

Assim, dado $\delta > 0$, basta considerar $p = \left\lceil \frac{2}{\delta} - 2 \right\rceil + 1$ para

que todos os termos da sucessão definida por $\frac{2}{n+2}$,

com $n \geq p$, pertençam a $V_\delta(0)$. Ou seja, $\lim \frac{2}{n+2} = 0$, pois verifica-se que

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{2}{n+2} - 0 \right| < \delta.$$

1.4 $\lim \frac{6n+1}{2n+2} = 3$

Seja $\delta > 0$. Tem-se:

$$\left| \frac{6n+1}{2n+2} - 3 \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{6n+1-3(2n+2)}{2n+2} \right| < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-5}{2n+2} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{5}{2n+2} < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2n+2 > \frac{5}{\delta} \Leftrightarrow 2n > \frac{5}{\delta} - 2 \Leftrightarrow n > \frac{5}{2\delta} - 1$$

Assim, dado $\delta > 0$, basta considerar $p = \left\lceil \frac{5}{2\delta} - 1 \right\rceil + 1$

para que todos os termos da sucessão definida

por $\frac{6n+1}{2n+2}$, com $n \geq p$, pertençam a $V_\delta(3)$. Ou seja,

$\lim \frac{6n+1}{2n+2} = 3$, pois verifica-se que

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N}: \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{6n+1}{2n+2} - 3 \right| < \delta.$$



Determina os limites seguintes.

2.1 $\lim \left(\frac{1}{2} + n \right)$

$$\frac{1}{2} + n = \frac{1+2n}{2}$$

Vamos mostrar que $\lim \left(\frac{1+2n}{2} \right) = +\infty$

Mostremos que

$$\forall L > 0, \exists p \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \frac{1+2n}{2} > L :$$

$$\frac{1+2n}{2} > L \Leftrightarrow 1+2n > 2L \Leftrightarrow n > \frac{2L-1}{2}$$

Assim, para cada $L > 0$, a partir de uma ordem p satisfazendo $p > \frac{2L-1}{2}$, todos os termos da sucessão são superiores a L . Portanto, $\lim \left(\frac{1}{2} + n \right) = +\infty$

2.2 $\lim \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 4 \right)$

$$\lim \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 4 \right) = \lim n^{-\frac{1}{2}} - 4 = 0 - 4 = -4$$

2.3 $\lim \frac{1}{n+5}$

Vamos mostrar que $\lim \left(\frac{1}{n+5} \right) = 0$

Seja $\delta > 0$. Tem-se:

$$\left| \frac{1}{n+5} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{n+5} < \delta \Leftrightarrow n+5 > \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta} - 5$$

Assim, dado $\delta > 0$, basta considerar $p = \left[\frac{1}{\delta} - 5 \right] + 1$

para que todos os termos da sucessão definida por $\frac{1}{n+5}$,

com $n \geq p$, pertençam a $V_\delta(0)$. Ou seja, $\lim \left(\frac{1}{n+5} \right) = 0$, pois verifica-se que

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{1}{n+5} \right| < \delta.$$

2.4 $\lim \left(-\frac{1}{2\sqrt{n}} \right)$

$$\lim \left(-\frac{1}{2\sqrt{n}} \right) = \lim \left(-\frac{1}{2} n^{-\frac{1}{2}} \right) =$$

$$\lim \left(-\frac{1}{2} \right) \times \lim \left(n^{-\frac{1}{2}} \right) = -\frac{1}{2} \times 0 = 0$$

2.5 $\lim \left(\frac{2}{n+2} \right)$

Vamos mostrar que $\lim \left(\frac{2}{n+2} \right) = 0$

Seja $\delta > 0$. Tem-se:

$$\left| \frac{2}{n+2} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{2}{n+2} < \delta \Leftrightarrow n+2 > \frac{2}{\delta} \Leftrightarrow n > \frac{2}{\delta} - 2$$

Assim, dado $\delta > 0$, basta considerar $p = \left[\frac{2}{\delta} - 2 \right] + 1$

para que todos os termos da sucessão definida por $\frac{2}{n+2}$,

com $n \geq p$, pertençam a $V_\delta(0)$. Ou seja, $\lim \left(\frac{2}{n+2} \right) = 0$, pois verifica-se que

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{2}{n+2} \right| < \delta.$$

2.6 $\lim \frac{2n-3}{n+5}$

Vamos mostrar que $\lim \frac{2n-3}{n+5} = 2$

Seja $\delta > 0$. Tem-se:

$$\left| \frac{2n-3}{n+5} - 2 \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{2n-3-2n-10}{n+5} \right| < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-13}{n+5} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{13}{n+5} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{13}{\delta} - 5$$

Assim, dado $\delta > 0$, basta considerar $p = \left[\frac{13}{\delta} - 5 \right] + 1$

para que todos os termos da sucessão definida por $\frac{2n-3}{n+5}$,

com $n \geq p$, pertençam a $V_\delta(2)$. Ou seja, $\lim \frac{2n-3}{n+5} = 2$, pois verifica-se que

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{2n-3}{n+5} - 2 \right| < \delta.$$

Considera que as sucessões u_n e v_n definidas pelos termos gerais:

$$u_n = \frac{2n-7}{n} \text{ e } v_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$$

3.1 Mostra que a sucessão u_n é limitada, indicando um majorante e um minorante.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2n-7}{n} = \frac{2n}{n} - \frac{7}{n} \\ 0 < \frac{7}{n} \leq 7 &\Leftrightarrow 0 > -\frac{7}{n} \geq -7 \Leftrightarrow 2 > 2 - \frac{7}{n} \geq -5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -5 \leq u_n < 2 \\ -5 &\text{ é um minorante e } 2 \text{ é um majorante.} \end{aligned}$$

3.2 Calcula o limite da sucessão v_n .

$$\lim v_n = \lim \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = \lim n^{-\frac{2}{3}} = 0$$

3.3 Qual é o valor de $\lim \frac{2n-7}{n\sqrt[3]{n^2}}$? Justifica a tua resposta.

$$\begin{aligned} \lim \frac{2n-7}{n\sqrt[3]{n^2}} &= \lim \left(\frac{2n-7}{n} \times \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \right) = \lim (u_n \times v_n) = 0, \\ \text{pois } (u_n) &\text{ é limitada e } v_n \rightarrow 0. \end{aligned}$$

3.4 Determina o limite da sucessão definida por $u_n + v_n = \frac{2n-7}{n} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$.

$$\lim u_n = \lim \frac{2n-7}{n} = \lim \frac{\frac{2n}{n} - \frac{7}{n}}{1} = \lim \frac{2 - \frac{7}{n}}{1} = \frac{2-0}{1} = 2$$

Por 3.2 $\lim v_n = 0$

Logo, $\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n = 2 + 0 = 2$

Determina o limite da sucessão de termo geral $u_n = \frac{n-2\sqrt{n}}{4n}$

$$\begin{aligned} \lim u_n &= \frac{n-2\sqrt{n}}{4n} = \lim \left(\frac{n}{4n} - \frac{2\sqrt{n}}{4n} \right) = \lim \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lim n^{\frac{1}{2}-1} = \lim \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lim n^{-\frac{1}{2}} = \lim \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{\infty} = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$



Considera as sucessões u_n e v_n tais que a primeira é limitada e a segunda está definida pelo termo geral $v_n = \frac{1}{5n-8}$. Indica o valor de $\lim (u_n \times v_n)$ e justifica a tua resposta.

$$\lim v_n = \lim \frac{1}{5n-8} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Como u_n é limitada então, $\lim(u_n \cdot v_n) = 0$

Determina:

6.1 $\lim \frac{10}{\sqrt{n}}$

$$\lim \frac{10}{\sqrt{n}} = \lim (10n^{-\frac{1}{2}}) = 10 \times \lim n^{-\frac{1}{2}} = 10 \times 0 = 0$$

6.2 $\lim \left(-\frac{3}{7\sqrt{n}}\right)$

$$\lim \left(-\frac{3}{7\sqrt{n}}\right) = \lim \left(-\frac{3}{7} \times n^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{3}{7} \times \lim n^{-\frac{1}{2}} = -\frac{3}{7} \times 0 = 0$$

6.3 $\lim \frac{3}{5n+1}$

$$\lim \frac{3}{5n+1} = \frac{3}{\infty} = 0$$

6.4 $\lim \left(\frac{2n}{3n-2}\right)^{-2}$

$$\lim \left(\frac{2n}{3n-2}\right)^{-2} = \left(\lim \frac{2n}{3n-2}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{9}{4}$$

6.5 $\lim n^7$

$$\lim n^7 = +\infty$$

6.6 $\lim \sqrt{3n^{-5}}$

$$\begin{aligned} \lim \sqrt{3n^{-5}} &= \lim (\sqrt{3} \times \sqrt{n^{-5}}) = \\ &= \sqrt{3} \times \lim (\sqrt{n^{-5}}) = \sqrt{3} \times \lim n^{-\frac{5}{2}} = \sqrt{3} \times 0 = 0 \end{aligned}$$

6.7 $\lim \sqrt{9 - \frac{1}{n}}$

$$\lim \sqrt{9 - \frac{1}{n}} = \sqrt{\lim \left(9 - \frac{1}{n}\right)} = \sqrt{\lim 9 - \lim \frac{1}{n}} = \sqrt{9 - 0} = 3$$

6.8 $\lim \frac{1}{\sqrt{4 - \frac{3}{n}}}$

$$\begin{aligned} \lim \frac{1}{\sqrt{4 - \frac{3}{n}}} &= \frac{1}{\lim \sqrt{4 - \frac{3}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\lim \left(4 - \frac{3}{n}\right)}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lim 4 - \lim \frac{3}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{4 - 3 \times 0}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Considera as sucessões de termos gerais $u_n = \frac{1}{2n^2}$ e $v_n = \frac{n+1}{n+2}$.

7.1 Determina $\lim u_n$ e $\lim v_n$.

$$\lim u_n = \lim \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2} \times \lim \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \times 0 = 0$$

$$\lim v_n = \lim \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{1} = 1$$

7.2 O que podes concluir sobre o limite da sucessão de termo geral $w_n = \frac{n+2}{(n+1)2n^2}$?

Justifica a tua resposta.

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{1}{2n^2}}{\frac{n+1}{n+2}} = \frac{1}{2n^2} \times \frac{n+2}{n+1} = \frac{n+2}{(n+1) \times 2n^2} = w_n$$

$\lim w_n = 0$, pois $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ e, portanto,

$$\lim w_n = \lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim u_n}{\lim v_n} = \frac{0}{1} = 0$$

Considera as sucessões de termos gerais $u_n = \frac{4n+1}{n}$ e $v_n = \frac{n^2+3}{n^2}$.

8.1 Determina $\lim u_n$ e $\lim v_n$.

$$\lim u_n = \lim \frac{4n+1}{n} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\lim v_n = \lim \frac{n^2+3}{n^2} = \lim \left(\frac{n^2}{n^2} + \frac{3}{n^2} \right) =$$

$$= \lim \left(1 + \frac{3}{n^2} \right) = \lim 1 + \lim \frac{3}{n^2} =$$

$$= 1 + \lim (3 \times n^{-2}) = 1 + 3 \times 0 = 1$$

8.2 Determina o termo geral da sucessão $(u_n + v_n)$.

$$\begin{aligned} u_n + v_n &= \frac{4n+1}{n} + \frac{n^2+3}{n^2} = \frac{n(4n+1) + n^2 + 3}{n^2} = \\ &= \frac{4n^2 + n + n^2 + 3}{n^2} = \frac{5n^2 + n + 3}{n^2} \end{aligned}$$

8.3 Determina $\lim (u_n + v_n)$ por dois processos diferentes.

Temos:

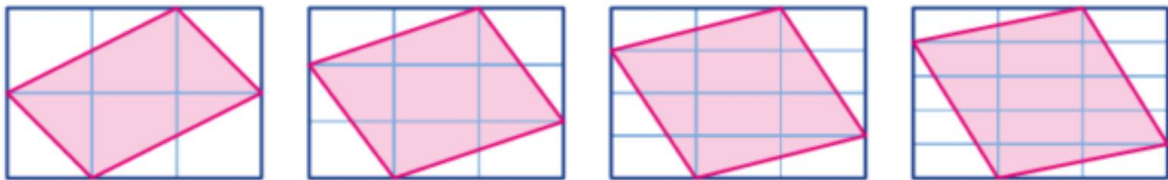
$$\begin{aligned} \lim(u_n + v_n) &= \lim \frac{5n^2 + n + 3}{n^2} = \lim \left(\frac{5n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2} + \frac{3}{n^2} \right) = \\ &= \lim \left(5 + \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} \right) = 5 + 0 + 0 = 5 \end{aligned}$$

Temos também:

$$\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n = 4 + 1 = 5$$

Uma sucessão de figuras, das quais se apresentam as quatro primeiras, foi construída tendo como base um retângulo com 1 dm^2 .

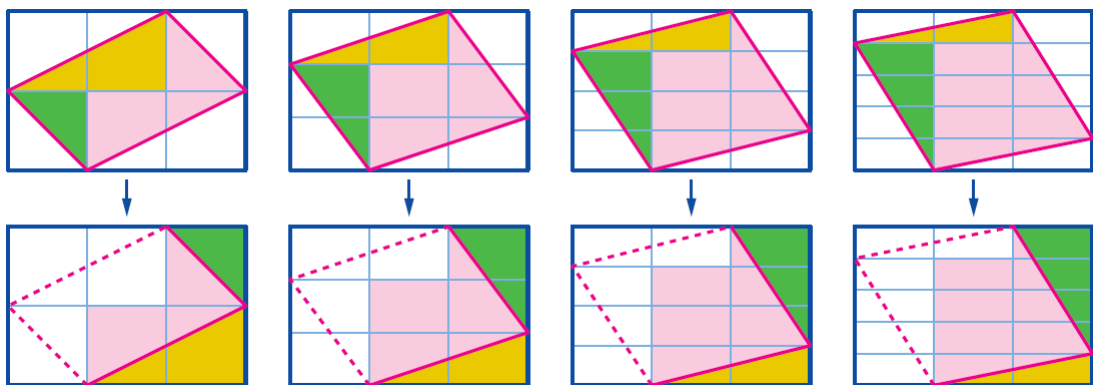
Seja a_n a sucessão das áreas, em dm^2 , dos paralelogramos coloridos.



9.1 Mostra que os primeiros termos da sucessão são: $\frac{3}{6}, \frac{5}{9}, \frac{7}{12}, \frac{9}{15}, \dots$

Como a área do retângulo é 1 dm^2 , a área da parte colorida é igual à fração da superfície do retângulo que está colorido.

Decompondo cada um dos paralelogramos,



Podemos construir outras figuras equivalentes, ou seja, correspondem a

$$\frac{3}{6}$$

$$\frac{5}{9}$$

$$\frac{7}{12}$$

$$\frac{9}{15}$$

da área do retângulo.

9.2 Determina o termo geral da sucessão.

O número de retângulos vai aumentando de três em três, isto é, o número de retângulos corresponde à sucessão $3n + 3$.

Por outro lado o paralelogramo é equivalente a uma figura composta por $2n + 1$ retângulos menores.

Assim o termo geral da sucessão é $a_n = \frac{2n+1}{3n+3}$

9.3 Prova que a sucessão é monótona crescente.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2(n+1)+1}{3(n+1)+3} - \frac{2n+1}{3n+3} = \frac{2n+3}{3n+4} - \frac{2n+1}{3n+3} = \\ &= \frac{(2n+3)(3n+3) - (2n+1)(3n+4)}{(3n+4)(3n+3)} \\ &= \frac{6n^2 + 6n + 9n + 9 - (6n^2 + 8n + 3n + 4)}{(3n+4)(3n+3)} \\ &= \frac{6n^2 + 15n + 9 - 6n^2 - 11n - 4}{(3n+4)(3n+3)} \\ &= \frac{4n+5}{(3n+4)(3n+3)} \end{aligned}$$

Temos que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n > 0$, ou seja, $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} > a_n$, o que prova que (a_n) é monótona crescente.

9.4 Justifica a seguinte afirmação:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2} \leq a_n < \frac{2}{3}$$

Vamos decompor $a_n = \frac{2n+1}{3n+3}$ através do algoritmo da divisão

$$\begin{array}{r} 2n+1 \quad | \quad 3n+3 \\ -2n-2 \quad | \quad 2 \\ \hline -1 \quad | \quad 3 \end{array}$$

$$a_n = \frac{2}{3} - \frac{1}{3n+3}$$

$$0 < \frac{1}{3n+3} \leq \frac{1}{6} \Leftrightarrow 0 > -\frac{1}{3n+3} \geq -\frac{1}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} > \frac{2}{3} - \frac{1}{3n+3} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq a_n < \frac{2}{3}$$

Temos, portanto $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \leq a_n < \frac{2}{3}$.

9.5 Prova, aplicando a definição, que a_n converge para $\frac{2}{3}$.

Seja $\delta > 0$. Tem-se:

$$\left| \frac{2n+1}{3n+3} - \frac{2}{3} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{2n+1-2(n+1)}{3n+3} \right| < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-1}{3n+3} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{3n+3} < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3n+3 > \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow 3n > \frac{1}{\delta} - 3 \Leftrightarrow n > \frac{1}{3\delta} - 1$$

Assim, dado $\delta > 0$, basta considerar $p = \left[\frac{1}{3\delta} - 1 \right] + 1$

para que todos os termos da sucessão definida por

$a_n = \frac{2n+1}{3n+3}$, com $n \geq p$, pertençam a $V_\delta\left(\frac{2}{3}\right)$. Ou seja,

$\lim a_n = \frac{2}{3}$, pois verifica-se que

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists p \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq p \Rightarrow \left| \frac{2n+1}{3n+3} - \frac{2}{3} \right| < \delta.$$

9.6 Determina $\lim (3a_n)$ e $\lim (a_n^2)$

$$\lim(3 \times a_n) = 3 \times \lim a_n = 3 \times \frac{2}{3} = 2$$

$$\lim(a_n^2) = (\lim a_n)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Considera as sucessões de termos gerais $u_n = -n^2$ e $v_n = \frac{n+2}{2n}$. Determina:

10.1 $\lim u_n$ e $\lim v_n$

$$\lim u_n = \lim(-n^2) = -\infty$$

$$\lim v_n = \lim \frac{n+2}{2n} = \frac{1}{2}$$

10.2 $\lim (u_n \cdot v_n)$

$$\lim(u_n \times v_n) = -\infty \times \frac{1}{2} = -\infty$$

10.3 $\lim (u_n + v_n)$

$$\lim(u_n + v_n) = -\infty + \frac{1}{2} = -\infty$$

10.4 $\lim u_n^2$

$$\lim u_n^2 = (\lim u_n)^2 = (-\infty)^2 = +\infty$$

Considera as sucessões de termos gerais $u_n = n^2 + 3n$ e $v_n = \frac{2}{n}$.

11.1 Determina $\lim u_n$ e $\lim v_n$.

$$\lim u_n = \lim(n^2 + 3n) = (+\infty) + (+\infty) = +\infty$$

$$\lim v_n = \lim \frac{2}{n} = 0$$

11.2 Determina $\lim (u_n + v_n)$.

$$\lim(u_n + v_n) = +\infty + 0 = +\infty$$

11.3 A partir dos valores dos limites das sucessões u_n e v_n , podemos determinar o valor de $\lim (u_n \cdot v_n)$? Justifica a tua resposta. Determina $\lim (u_n \cdot v_n)$.

Não, pois $\lim(u_n \times v_n)$ é uma indeterminação do tipo $\infty \times 0$.

$$\begin{aligned} \lim(u_n \times v_n) &= \lim \left[(n^2 + 3n) \times \frac{2}{n} \right] = \\ &= 2 \lim(n + 3) = 2 \times (+\infty + 3) = +\infty \end{aligned}$$

11.4 Determina $\lim u_n^3$

$$\lim(u_n^3) = (\lim u_n)^3 = (+\infty)^3 = +\infty$$

Determina os seguintes limites:

12.1 $\lim (n^3 + n^2)$

$$\lim(n^3 + n^2) = +\infty + (+\infty) = +\infty$$

12.2 $\lim \left(n^4 + \frac{2}{n} \right)$

$$\lim \left(n^4 + \frac{2}{n} \right) = +\infty + 0 = +\infty$$

12.3 $\lim \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - n^2 \right)$

$$\lim \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - n^2 \right) = 0 - (+\infty) = -\infty$$

12.4 $\lim (-n^2 + 1)^5$

$$\lim (-n^2 + 1)^5 = (\lim (-n^2 + 1))^5 = (-\infty + 1)^5 = (-\infty)^5 = -\infty$$

12.5 $\lim \left(n \left(3 + \frac{4}{n} \right) \right)$

$$\begin{aligned} \lim \left(n \times \left(3 + \frac{4}{n} \right) \right) &= \\ &= \lim n \times \lim \left(3 + \frac{4}{n} \right) = +\infty \times (3 + 0) = +\infty \end{aligned}$$

12.6 $\lim \left(-n^3 \left(\frac{1}{n} + 2 \right) \right)$

$$\begin{aligned} \lim \left(-n^3 \times \left(\frac{1}{n} + 2 \right) \right) &= \\ &= \lim (-n^3) \times \lim \left(\frac{1}{n} + 2 \right) = -\infty \times (0 + 2) = -\infty \end{aligned}$$

Calcula os limites das seguintes sucessões, começando por identificar o tipo de indeterminação.

13.1 $\lim (3n - 7n^2)$

$$\begin{aligned} \lim (3n - 7n^2) &\stackrel{\infty - \infty}{=} \lim \left(n^2 \times \left(\frac{3}{n} - 7 \right) \right) = \\ &= \lim n^2 \times \lim \left(\frac{3}{n} - 7 \right) = +\infty \times (0 - 7) = -\infty \end{aligned}$$

13.2 $\lim \left(n^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$

$$\begin{aligned} \lim \left(n^2 \times \frac{1}{\sqrt{n}} \right) &\stackrel{\infty \times 0}{=} \lim \left(\frac{n^2}{\sqrt{n}} \right) \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim \left(\frac{n^2 \times \sqrt{n}}{n} \right) \\ &= \lim (n \times \sqrt{n}) = +\infty \times (+\infty) = +\infty \end{aligned}$$

13.3 $\lim \left(\frac{1}{2}n^2 - 3n^3 \right)$

$$\begin{aligned} \lim \left(\frac{1}{2}n^2 - 3n^3 \right) &\stackrel{\infty - \infty}{=} \lim \left(n^3 \times \left(\frac{1}{2n} - 3 \right) \right) = \\ &= \lim n^3 \times \lim \left(\frac{1}{2n} - 3 \right) = +\infty \times (0 - 3) = -\infty \end{aligned}$$

13.4 $\lim \left(\frac{1}{n^2} (3n^3 + 5n) \right)$

$$\begin{aligned} \lim \left(\frac{1}{n^2} \times (3n^3 + 5n) \right) &\stackrel{0 \times \infty}{=} \lim \left(\frac{3n^3 + 5n}{n^2} \right) \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \\ &= \lim \left(3n + \frac{5}{n} \right) = +\infty + 0 = +\infty \end{aligned}$$

13.5 $\lim (n^3 - n^2)$

$$\begin{aligned} \lim (n^3 - n^2) &\stackrel{\infty - \infty}{=} \lim \left(n^3 \times \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right) = \\ &= \lim n^3 \times \lim \left(1 - \frac{1}{n} \right) = +\infty \times (1 - 0) = +\infty \end{aligned}$$

13.6 $\lim \left(\frac{3}{n} (2n^2 + 5n) \right)$

$$\begin{aligned} \lim \left(\frac{3}{n} \times (2n^2 + 5n) \right) &\stackrel{0 \times \infty}{=} \lim \left(\frac{6n^2 + 15n}{n} \right) \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \\ &= \lim (6n + 15) = +\infty + 15 = +\infty \end{aligned}$$

Considera as sucessões de termos gerais $u_n = n^2 + 2n$ e $w_n = n^2$.

14.1 Determina $\lim u_n$ e $\lim w_n$.

$$\begin{aligned} \lim u_n &= \lim (n^2 + 2n) = +\infty + (+\infty) = +\infty \\ \lim w_n &= \lim n^2 = +\infty \end{aligned}$$

14.2 A partir das sucessões u_n e w_n , podemos calcular $\lim \frac{u_n}{w_n}$? Justifica a tua resposta.

Não, pois $\lim \frac{u_n}{w_n}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\begin{aligned} \lim \frac{u_n}{w_n} &= \lim \frac{n^2 + 2n}{n^2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim \left(\frac{n^2}{n^2} + \frac{2n}{n^2} \right) = \\ &= \lim \left(1 + \frac{2}{n} \right) = 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

14.3 Determina $\lim \frac{u_n}{w_n}$.

$$\lim \frac{u_n}{w_n} = \lim \frac{n^2 + 2n}{n^2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\Leftrightarrow} \lim \frac{\frac{n^2 + 2n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}} = \frac{1+0}{1} = 1$$



Considera as sucessões a_n e b_n . Sabe-se que $\lim u_n = 0^+$ e $\lim b_n = 0^-$.

Indica $\lim \frac{1}{a_n}$, $\lim \frac{1}{b_n}$, $\lim \left(-\frac{1}{a_n}\right)$ e $\lim \left(-\frac{1}{b_n}\right)$.

$$\lim a_n = 0^+ \text{ e } \lim b_n = 0^-.$$

$$\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim \frac{1}{b_n} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim \left(-\frac{1}{a_n}\right) = -\frac{1}{0^+} = -(+\infty) = -\infty$$

$$\lim \left(-\frac{1}{b_n}\right) = -\frac{1}{0^-} = -(-\infty) = +\infty$$

Considera as sucessões de termos gerais, $u_n = n^2 + 4n$, $v_n = 5 - 4n$, $w_n = -n^3 + 1$ e $z_n = 2 - 3n^2$.

16.1 Justifica que $\lim u_n = +\infty$ e que:

a) $\lim v_n = -\infty$ e $\lim \frac{u_n}{v_n} = -\infty$

$$\lim v_n = \lim(5 - 4n) = 5 - (+\infty) = 5 - \infty = -\infty$$

$$\begin{aligned} \lim \frac{u_n}{v_n} &= \lim \frac{n^2 + 4n}{5 - 4n} \stackrel{\infty}{=} \lim \frac{n(n+4)}{n\left(\frac{5}{n} - 4\right)} = \\ &= \lim \frac{n+4}{\frac{5}{n} - 4} = \frac{+\infty}{0-4} = -\infty \end{aligned}$$

b) $\lim w_n = -\infty$ e $\lim \frac{u_n}{w_n} = 0$

$$\lim w_n = \lim(-n^3 + 1) = -\infty + 1 = -\infty$$

$$\begin{aligned} \lim \frac{u_n}{w_n} &= \lim \frac{n^2 + 4n}{-n^3 + 1} \stackrel{\infty}{=} \lim \frac{n^2\left(1 + \frac{4}{n}\right)}{n^2\left(-n + \frac{1}{n^2}\right)} = \\ &= \lim \frac{1 + \frac{4}{n}}{-n + \frac{1}{n^2}} = \frac{1+0}{-\infty+0} = \frac{1}{-\infty} = 0 \end{aligned}$$



$$\text{c) } \lim z_n = -\infty \text{ e } \lim \frac{u_n}{z_n} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim z_n = \lim(2 - 3n^2) = 2 - 3 \times (+\infty) = 2 - \infty = -\infty$$

$$\begin{aligned} \lim \frac{u_n}{z_n} &= \lim \frac{n^2 + 4n}{2 - 3n^2} \stackrel{\infty}{=} \lim \frac{n^2 \left(1 + \frac{4}{n}\right)}{n^2 \left(\frac{2}{n^2} - 3\right)} = \\ &= \lim \frac{1 + \frac{4}{n}}{\frac{2}{n^2} - 3} = \frac{1 + 0}{0 - 3} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

17.2 Considera as sucessões de termos gerais $a_n = \frac{1}{u_n}$, $b_n = \frac{1}{v_n}$ e $c_n = \frac{1}{z_n}$.

a) Mostra que $\lim a_n = \lim b_n = \lim c_n = 0$.

$$\lim a_n = \lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim b_n = \lim \frac{1}{v_n} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\lim c_n = \lim \frac{1}{z_n} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

b) Calcula $\lim \frac{b_n}{a_n}$ e $\lim \frac{c_n}{a_n}$.

$$\lim \frac{a_n}{b_n} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim \frac{\frac{1}{+\infty}}{\frac{1}{-\infty}} = -\infty$$

$$\lim \frac{c_n}{a_n} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim \frac{\frac{1}{z_n}}{\frac{1}{u_n}} = \lim \frac{u_n}{z_n} = -\frac{1}{3}$$

Calcula os seguintes limites:

17.1 $\lim \frac{n^3 - n^2}{3n^4 - 1}$

$$\lim \frac{n^3 - n^2}{3n^4 - 1} \stackrel{\infty}{=} \lim \frac{n^4 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)}{n^4 \left(3 - \frac{1}{n^4}\right)} = \frac{0}{3} = 0$$

17.2 $\lim \frac{n^2 - 4}{n + 4}$

$$\lim \frac{n^2 - 4}{n + 4} \stackrel{\infty}{=} \lim \frac{n \left(n - \frac{4}{n}\right)}{n \left(1 + \frac{4}{n}\right)} = \lim \frac{n - \frac{4}{n}}{1 + \frac{4}{n}} = \frac{+\infty - 0}{1 + 0} = +\infty$$



$$17.3 \lim \frac{n}{\sqrt{n}}$$

$$\begin{aligned} \lim \frac{n}{\sqrt{n}} &\stackrel{\infty}{=} \lim \frac{n \times \sqrt{n}}{\sqrt{n} \times \sqrt{n}} = \lim \frac{n \times \sqrt{n}}{n} = \\ &= \lim \sqrt{n} = +\infty \end{aligned}$$

$$17.4 \lim \frac{n^3-1}{n-1}$$

$$\begin{aligned} \lim \frac{n^3-1}{n-1} &\stackrel{\infty}{=} \lim \frac{n\left(n^2-\frac{1}{n}\right)}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \lim \frac{n^2-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} = \frac{+\infty-0}{1-0} = +\infty \end{aligned}$$

$$17.4 \lim \frac{2n+1}{4n^2-1}$$

$$\lim \frac{2n+1}{4n^2-1} \stackrel{\infty}{=} \lim \frac{2n+1}{(2n+1)(2n-1)} = \lim \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$17.5 \lim (\sqrt{4n+3} - 2\sqrt{n})$$

$$\begin{aligned} \lim (\sqrt{4n+3} - 2\sqrt{n}) &\stackrel{\infty-\infty}{=} \\ &= \lim \frac{(\sqrt{4n+3} - 2\sqrt{n})(\sqrt{4n+3} + 2\sqrt{n})}{\sqrt{4n+3} + 2\sqrt{n}} = \\ &= \lim \frac{(\sqrt{4n+3})^2 - (2\sqrt{n})^2}{\sqrt{4n+3} + 2\sqrt{n}} = \lim \frac{4n+3-4n}{\sqrt{4n+3} + 2\sqrt{n}} \\ &= \lim \frac{3}{\sqrt{4n+3} + 2\sqrt{n}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

Considera as sucessões de termos gerais, $u_n = n^2 + 2n + 1$, $v_n = 2 + 4n$, $w_n = -3n^3 + 1$ e $z_n = 1 - n^2$

Determina:

$$18.1 \lim u_n, \lim v_n, \lim w_n \text{ e } \lim z_n$$

$$\lim u_n = \lim (n^2 + 2n + 1) = \lim n^2 = +\infty$$

$$\lim v_n = \lim (2 + 4n) = \lim (4n) = +\infty$$

$$\lim w_n = \lim (-3n^3 + 1) = \lim (-3n^3) = -\infty$$

$$\lim z_n = \lim (1 - 3n^2) = \lim (-3n^2) = -\infty$$

$$18.2 \lim \frac{u_n}{z_n}$$

$$\lim \frac{u_n}{z_n} = \lim \frac{n^2 + 2n + 1}{1 - 3n^2} \stackrel{\infty}{=} \lim \frac{n^2}{-3n^2} = -\frac{1}{3}$$

$$18.3 \lim \frac{u_n}{v_n}$$

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{n^2 + 2n + 1}{2 + 4n} \stackrel{\infty}{=} \lim \frac{n^2}{4n} = \lim \frac{n}{4} = +\infty$$



$$18.4 \lim \frac{v_n}{w_n}$$

$$\lim \frac{v_n}{w_n} = \lim \frac{2+4n}{-3n^3+1} \stackrel{\infty}{=} \lim \frac{4n}{-3n^3} = \lim \frac{4}{-3n^2} = 0$$

$$18.5 \lim \frac{w_n}{z_n}$$

$$\lim \frac{w_n}{z_n} = \lim \frac{-3n^3+1}{1-3n^2} \stackrel{\infty}{=} \lim \frac{-3n^3}{-3n^2} = \lim n = +\infty$$

Calcula, caso existam, os limites das seguintes sucessões:

$$19.1 \ u_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{n^2+3}$$

$$u_n = \begin{cases} -\frac{n}{n^2+3} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{n}{n^2+3} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$\lim \left(-\frac{n}{n^2+3} \right) \stackrel{\infty}{=} \lim \left(-\frac{n}{n^2} \right) = 0$$

$$\lim \frac{n}{n^2+3} \stackrel{\infty}{=} \lim \frac{n}{n^2} = \lim \frac{1}{n} = 0$$

Como os termos de ordem ímpar e os termos de ordem par convergem para o mesmo limite, a sucessão tem limite, sendo $\lim u_n = 0$.

$$19.3 \ u_n = \begin{cases} -1 & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{3n^3+1}{3n^3} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$$\lim(-1) = -1$$

$$\lim \frac{3n^3+1}{3n^3} \stackrel{\infty}{=} \lim \frac{3n^3}{3n^3} = 1$$

Como os termos de ordem ímpar e os termos de ordem par convergem para limites diferentes, a sucessão não tem limite.

$$19.2 \ u_n = \begin{cases} \frac{2n+3}{n} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{2n^2+n}{n^2} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$$\lim \frac{2n+3}{n} \stackrel{\infty}{=} \lim \frac{2n}{n} = 2$$

$$\lim \frac{2n^2+n}{n^2} \stackrel{\infty}{=} \lim \frac{2n^2}{n^2} = 2$$

Como os termos de ordem ímpar e os termos de ordem par convergem para o mesmo limite, a sucessão tem limite, sendo $\lim u_n = 2$.

$$19.4 \ u_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n^3+2} & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n^4+1}{2+n^3} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$$\lim \frac{n-1}{n^3+2} \stackrel{\infty}{=} \lim \frac{n}{n^3} = 0$$

$$\lim \frac{n^4+1}{2+n^3} \stackrel{\infty}{=} \lim \frac{n^4}{n^3} = +\infty$$

Como os termos de ordem ímpar e os termos de ordem par tendem para limites diferentes, a sucessão não tem limite.

Determina:

20.1 $\lim (3 + 2n^2 + 5n^4)$

$$\lim(3 + 2n^2 + 5n^4) = \lim(5n^4) = +\infty$$

20.2 $\lim (7n^2 - n^4)$

$$\lim(7n^2 - n^4) \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim(-n^4) = -\infty$$

20.3 $\lim \left(\frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n\right)$

$$\lim\left(\frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n\right) \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim\left(\frac{3}{2}n^2\right) = +\infty$$

20.4 $\lim (n^2 - \sqrt{2})$

$$\lim(n^2 - \sqrt{2}) = \lim n^2 = +\infty$$

20.5 $\lim \frac{n^2-3}{(n-\sqrt{3})(n+\sqrt{3})}$

$$\lim \frac{n^2-3}{(n-\sqrt{3})(n+\sqrt{3})} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim \frac{n^2-3}{n^2-3} = \lim 1 = 1$$

20.6 $\lim \frac{-n^4+n^5}{n^3-5}$

$$\lim \frac{-n^4+n^5}{n^3-5} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim \frac{n^5}{n^3} = \lim n^2 = +\infty$$

20.7 $\lim \frac{\frac{1}{2}n^2+5n^3}{\frac{3}{4}n^3-5}$

$$\lim \frac{\frac{1}{2}n^2+5n^3}{\frac{3}{4}n^3-5} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim \frac{5n^3}{\frac{3}{4}n^3} = \frac{5}{\frac{3}{4}} = \frac{20}{3}$$

20.8 $\lim \left(\frac{1}{\frac{1}{2}n^2+5n} (n-1)(-n-2)\right)$

$$\begin{aligned} \lim \left(\frac{2^{n+1}}{\sqrt[n]{5}} - \frac{2^{n+2}}{3^{n+2}}\right) &= \lim \left(\frac{2^{n+1}}{\sqrt[n]{5}}\right) - \lim \left(\frac{2^{n+2}}{3^{n+2}}\right) = \\ &= \frac{\lim 2^{n+1}}{\lim \sqrt[n]{5}} - \lim \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} = \frac{+\infty}{1} - \lim \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n \times \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] \\ &= +\infty - 0 \times \frac{4}{9} = +\infty \end{aligned}$$

Determina $\lim \left(\frac{2^{n+1}}{\sqrt[n]{5}} - \frac{2^{n+2}}{3^{n+2}}\right)$

$$\begin{aligned} \lim \left(\frac{2^{n+1}}{\sqrt[n]{5}} - \frac{2^{n+2}}{3^{n+2}}\right) &= \lim \left(\frac{2^{n+1}}{\sqrt[n]{5}}\right) - \lim \left(\frac{2^{n+2}}{3^{n+2}}\right) = \\ &= \frac{\lim 2^{n+1}}{\lim \sqrt[n]{5}} - \lim \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} = \frac{+\infty}{1} - \lim \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n \times \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] \\ &= +\infty - 0 \times \frac{4}{9} = +\infty \end{aligned}$$

Considera as sucessões de termos gerais, $u_n = 2^{n+1}$, $v_n = 8^n$, $w_n = \sqrt[n+1]{2}$ e $z_n = \frac{1}{n^3}$.

Determina:

22.1 $\lim u_n$, $\lim v_n$, $\lim w_n$ e $\lim z_n$

$$\begin{aligned}\lim u_n &= \lim 2^{n+1} = \\ &= \lim (2^n \times 2) = 2 \times \lim (2^n) = 2 \times (+\infty) = +\infty\end{aligned}$$

$$\lim v_n = \lim 8^n = +\infty$$

$$\lim w_n = \lim \sqrt[n+1]{2} = \lim_{m=n+1} \sqrt[m]{2} = 1$$

$$\lim z_n = \lim \frac{1}{n^3} = 0$$

22.2 $\lim \frac{u_n}{v_n}$

$$\begin{aligned}\lim \frac{u_n}{v_n} &= \lim \frac{2^{n+1}}{8^n} \stackrel{\infty}{=} \lim \frac{2 \times 2^n}{8^n} = \\ &= \lim \left(2 \times \left(\frac{2}{8} \right)^n \right) = 2 \times \lim \left(\frac{1}{4} \right)^n = 2 \times 0 = 0\end{aligned}$$

22.3 $\lim \frac{1}{w_n}$

$$\lim \frac{1}{w_n} = \lim \frac{1}{\sqrt[n+1]{2}} = \frac{1}{1} = 1$$

22.4 $\lim \frac{1}{z_n}$

$$\lim \frac{1}{z_n} = \lim \frac{1}{\frac{1}{n^3}} = \lim n^3 = +\infty$$

22.5 $\lim (z_n - w_n)$

$$\begin{aligned}\lim (z_n - w_n) &= \lim \left(\frac{1}{n^3} - \sqrt[n+1]{2} \right) = \\ &= \lim \left(\frac{1}{n^3} \right) - \lim \left(\sqrt[n+1]{2} \right) = 0 - 1 = -1\end{aligned}$$



Determina, caso existam, os limites das sucessões de termo geral:

$$23.1 \quad u_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{4\sqrt{n}}$$

$$u_n = \begin{cases} -\frac{1}{4\sqrt{n}} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \frac{1}{4\sqrt{n}} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$\lim \left(-\frac{1}{4\sqrt{n}} \right) = 0$$

$$\lim \frac{1}{4\sqrt{n}} = 0$$

Como os termos de ordem ímpar e os termos de ordem par convergem para o mesmo limite, a sucessão tem limite, sendo $\lim u_n = 0$.

$$23.2 \quad u_n = \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{n+1}} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 2 - \frac{1}{\sqrt{n}} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$\lim \frac{3}{\sqrt{n+1}} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

$$\lim \left(2 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 2 - 0 = 2$$

Como os termos de ordem ímpar e os termos de ordem par convergem para limites diferentes, a sucessão não tem limite.

Determina:

$$24.1 \quad \lim \sqrt{\frac{n^2+3}{4n^2+1}}$$

$$\lim \sqrt{\frac{n^2+3}{4n^2+1}} = \sqrt{\lim \frac{n^2+3}{4n^2+1}} \stackrel{\infty}{=} \sqrt{\lim \frac{n^2}{4n^2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$24.2 \quad \lim \frac{2^n}{4^{n+1}}$$

$$\lim \frac{2^n}{4^{n+1}} \stackrel{\infty}{=} \lim \frac{2^n}{4 \times 4^n} =$$

$$= \lim \left(\frac{1}{4} \times \left(\frac{2}{4} \right)^n \right) = \frac{1}{4} \times \lim \left(\frac{1}{2} \right)^n = \frac{1}{4} \times 0 = 0$$



24.3 $\lim \frac{6^n}{4^{n+1}}$

$$\begin{aligned}\lim \frac{6^n}{4^{n+1}} &= \lim \frac{6^n}{4 \times 4^n} = \\ &= \lim \left(\frac{1}{4} \times \left(\frac{6}{4} \right)^n \right) = \frac{1}{4} \times \lim \left(\frac{3}{2} \right)^n = \frac{1}{4} \times (+\infty) = +\infty\end{aligned}$$

24.4 $\lim \frac{2^n}{1+5^{n+1}}$

$$\begin{aligned}\lim \frac{2^n}{1+5^{n+1}} &= \lim \frac{2^n}{2^n \left(\frac{1}{2^n} + \frac{5^{n+1}}{2^n} \right)} = \lim \frac{1}{\frac{1}{2^n} + 5 \times \frac{5^n}{2^n}} = \\ &= \lim \frac{1}{\frac{1}{2^n} + 5 \times \left(\frac{5}{2} \right)^n} = \frac{1}{0 + 5 \times (+\infty)} = \frac{1}{+\infty} = 0\end{aligned}$$

24.5 $\lim \frac{2^n+3}{4^n+8}$

$$\begin{aligned}\lim \frac{2^n+3}{4^n+8} &= \lim \frac{2^n \left(1 + \frac{3}{2^n} \right)}{2^n \left(2^n + \frac{8}{2^n} \right)} = \\ &= \lim \frac{1 + \frac{3}{2^n}}{2^n + \frac{8}{2^n}} = \frac{1+0}{+\infty+0} = \frac{1}{+\infty} = 0\end{aligned}$$

24.6 $\lim \frac{3^{n+1}+7}{3^n-1}$

$$\lim \frac{3^{n+1}+7}{3^n-1} = \lim \frac{3^n \left(3 + \frac{7}{3^n} \right)}{3^n \left(1 - \frac{1}{3^n} \right)} = \lim \frac{3 + \frac{7}{3^n}}{1 - \frac{1}{3^n}} = \frac{3+0}{1-0} = 3$$

26.7 $\lim \frac{2^n-3^n}{6^n}$

$$\begin{aligned}\lim \frac{2^n-3^n}{6^n} &= \lim \left(\frac{2^n}{6^n} - \frac{3^n}{6^n} \right) = \lim \left(\left(\frac{2}{6} \right)^n - \left(\frac{3}{6} \right)^n \right) = \\ &= \lim \left(\frac{1}{3} \right)^n - \lim \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0 - 0 = 0\end{aligned}$$



$$26.8 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^n}{2^n + 5^{n+1}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^n}{2^n + 5^{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \left(2 \times \frac{2^n}{5^n} + \frac{3^n}{5^n} \right)}{5^n \left(\frac{2^n}{5^n} + 5 \right)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times \left(\frac{2}{5} \right)^n + \left(\frac{3}{5} \right)^n}{\left(\frac{2}{5} \right)^n + 5} = \frac{2 \times 0 + 0}{0 + 5} = 0 \end{aligned}$$