



SUCESSÕES – GLOBAL

1. Considera a sucessão u_n em que se sabe os cinco primeiros termos:

$$3, 10, 17, 24, 31, \dots$$

Sabendo que se mantém a lei de formação, qual é o valor de u_{20} ?

- (A) 129 (B) 136 (C) 139 (D) 143

$$u_n = 3 + 7(n-1) \Leftrightarrow u_n = 3 + 7n - 7 \Leftrightarrow u_n = 7n - 4$$

$$u_{20} = 7 \times 20 - 4 = 136$$

OPÇÃO: B

2. Considera as sucessões a_n, b_n, c_n, d_n definidas, respetivamente, por:

$$a_n = \frac{n-3}{2n-9} ; b_n = n^2 - 5n + 5 ; c_n = \frac{(-1)^n}{2n-3} ; d_n = -4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- 2.1 Indica qual das sucessões não tem -1 como termo.

- (A) a_n (B) b_n (C) c_n (D) d_n

$$a_n = -1 \Leftrightarrow \frac{n-3}{2n-9} = -1 \Leftrightarrow n-3 = -2n+9 \Leftrightarrow 3n=6 \Leftrightarrow n=2, n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = -1 \Leftrightarrow n^2 - 5n + 5 = -1 \Leftrightarrow n^2 - 5n + 6 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} \Leftrightarrow n=2 \vee n=3, n \in \mathbb{N}$$

$$c_n = -1 \Leftrightarrow \frac{(-1)^n}{2n-3} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2n-3} = -1 & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{-1}{2n-3} = -1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2n-3 = -1 & \text{se } n \text{ é par} \\ -2n+3 = -1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2n=2 & \text{se } n \text{ é par} \\ -2n=-4 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=1 & \text{se } n \text{ é par} \\ n=2 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}, \text{ é um absurdo logo } -1 \notin c_n$$

OPÇÃO: C

2.2 Qual das sucessões é monótona?

(A) a_n

(B) b_n

(C) c_n

(D) d_n

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1-3}{2(n+1)-9} - \frac{n-3}{2n-9} = \frac{n-2}{2n-7} - \frac{n-3}{2n-9} = \frac{2n^2 - 4n - 2n^2 + 6n}{(2n-7)(2n-9)} = \frac{2n}{(2n-7)(2n-9)}$$

C.A.

$$2n > 0 \text{ e } (2n-7)(2n-9) = 0 \Leftrightarrow 4n^2 - 18n - 14n + 63 = 0 \Leftrightarrow 4n^2 - 32n + 63 = 0 \Leftrightarrow n = 3,5 \vee n = 4,5 \text{ assim para } n=4 \text{ } (2n-7)(2n-9) < 0$$

Portanto a sucessão não é monótona

b_n como se trata de uma sucessão quadrática com zeros em $n \approx 3,6$ e $n \approx 1,4$ não é uma sucessão monótona

c_n pela alínea anterior não é monótona

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{\cancel{-4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\cancel{-4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n} \times \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \text{ é uma progressão geométrica de razão } \frac{1}{2}, \text{ logo é monótona}$$

OPÇÃO: D

3. Seja x_n a sucessão em que se sabe que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} - x_n = (-1)^n$$

O termo geral da sucessão pode ser dado por:

(A) $n + 1$

(B) $-n + 2$

(C) $\frac{(-1)^{n+1}}{2} + 1$

(D) $\frac{(-1)^n}{2} + 2$

$$(A) \quad n+1+1-n-1=1$$

$$(B) \quad -(n+1)+2+n-2=-n-1+n-2=-3$$

$$(C) \quad \frac{(-1)^{n+1+1}}{2} + 1 - \frac{(-1)^{n+1}}{2} - 1 = \frac{(-1)^n \times (-1)^2 - (-1)^n \times (-1)}{2} = \frac{(-1)^n + (-1)^n}{2} = \frac{2(-1)^n}{2} = (-1)^n$$

OPÇÃO: C

4. Considera a sucessão definida por:

$$v_n = \begin{cases} 3n + 1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 3n - 2 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Indica qual das seguintes afirmações é verdadeira.

- (A) v_n é monótona e limitada
 (B) v_n é monótona e não limitada
 (C) v_n é limitada e não monótona
 (D) v_n é não monótona e não limitada

(A) $\lim(3n+1)=+\infty$ e $\lim(3n-2)=+\infty$, logo v_n não é limitada

(B) • se n é par, então, $v_{n+1} - v_n = 3(n+1) - 2 - 3n - 1 = 3n + 3 - 2 - 3n - 1 = 0$

• se n é ímpar, então, $v_{n+1} - v_n = 3(n+1) + 1 - 3n + 2 = 3n + 3 + 1 - 3n + 2 = 6 > 0$

A sucessão é crescente em sentido lato.

OPÇÃO: B

5. A pilha de cartas ao lado tem três andares.

Indica o número de cartas da base de uma pilha e o número total de cartas utilizado na construção da pilha, supondo que tem 6 andares e se mantém o mesmo processo de empilhamento, respetivamente:

- (A) 12 e 60 (B) 12 e 57
 (C) 18 e 63 (D) 15 e 45

O termo geral da base de cartas é $u_n = 2n$

$$u_6 = 6 \times 2 = 12$$

$$\text{O total de cartas é: } 3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 12 = 57$$

OPÇÃO: B



6. Numa ilha isolada do Pacífico Sul, foi efetuado o registo parcial das distâncias percorridas por uma tartaruga.

Verificou-se que esta percorreu 40 m no 1º dia de registo e a cada dia percorria mais cinco metros do que no dia anterior.

Ficou igualmente registado que a tartaruga percorreu 13 km durante todo o tempo da experiência.

Quantos dias decorreram entre o 1º dia e último dia de registo?

- (A) 55 (B) 60 (C) 65 (D) 70



Termo geral da progressão aritmética é
 $t_n = t_1 + 5(n-1) = 40 + 5n - 1 = 5n + 35$

$$S_N = \frac{t_1 + t_n}{2} \times n \Leftrightarrow 13000 = \frac{40 + 5n + 35}{2} \times n \Leftrightarrow 2600 = 75n + 5n^2 \Leftrightarrow 5n^2 + 75n - 2600 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n = -80 \vee n = 65 \Leftrightarrow n = 65$$

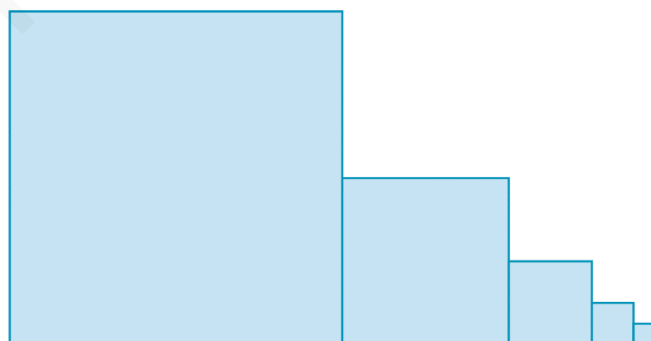
$n \in \mathbb{N}$

OPÇÃO: C

7. Seja v_n a sucessão das áreas dos quadrados representados na figura. O primeiro quadrado tem lado 3 e o lado de cada quadrado seguinte é metade do lado do quadrado anterior.

7.1 O termo geral da sucessão é:

- (A) $\frac{9}{2n}$ (B) $\frac{4}{n}$
 (C) $\frac{9}{2^{2n-2}}$ (D) $\frac{9}{2^{n-2}}$



v_n é uma progressão geométrica

$$v_1 = 3 \times 3 = 9 \quad ; \quad v_2 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\frac{9}{4}}{9} = \frac{1}{4}$$

$$v_n = v_1 \times r^{n-1} = 9 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{9}{4^{n-1}} = \frac{9}{(2^2)^{n-1}} = \frac{9}{2^{2n-2}}$$

OPÇÃO: C

7.2 A soma das áreas dos dez primeiros quadrados é:

(A) $\frac{9}{4^9}$

(B) $6 - \frac{3}{2^9}$

(C) $12 - \frac{3}{4^9}$

(D) $18 - \frac{9}{2^9}$

$$\begin{aligned} S_{10} &= 9 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{4}} = 9 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10}}{\frac{3}{4}} = 36 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10}}{3} = 12 \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10}\right) = 12 - 12 \left(\frac{1}{4}\right)^{10} = \\ &= 12 - 3 \times 4 \times 4^{-10} = 12 - 3 \times 4^{-9} = 12 - \frac{3}{4^9} \end{aligned}$$

OPÇÃO: C

8. Considera as sucessões a_n e b_n definidas, respetivamente, por:

$$a_n = \frac{2n+1}{1-2n} \quad \text{e} \quad b_n = \frac{n-2}{n+2}$$

Sabendo que $A = \lim a_n$ e $B = \lim b_n$, tem-se que:

(A) $A = 2B$

(B) $A = B$

(C) $A = -B$

(D) $A = B + 1$

$$\begin{aligned} \lim A_n &= \lim \frac{2n+1}{1-2n} = -1 \quad \text{e} \quad \lim B_n = \lim \frac{n-2}{n+2} = 1 \\ A &= -B \end{aligned}$$

OPÇÃO: C

9. O valor de $\lim_n \frac{\cos n}{n^2}$ é

(A) 0

(B) 1

(C) -1

(D) $+\infty$

$\cos n$ é uma sucessão limitada, $-1 \leq \cos n \leq 1$

$$\lim \frac{1}{n^2} = 0$$

$$\text{Assim, } \lim \frac{\cos n}{n^2} = 0$$

OPÇÃO: A

10. Dada uma sucessão, em que $\lim_n(u_n) = +\infty$, indica qual seguintes afirmações é necessariamente verdadeira.

- (A) u_n é monótona
- (B) u_n é limitada inferiormente
- (C) u_n é limitada superiormente
- (D) u_n tem todos os termos positivos

Por definição, existe $p \in \mathbb{N}$, tal que $u_n \geq 1$ sempre que $n \geq p$

Então u_n é limitada inferiormente

OPÇÃO: B

11. Considera a sucessão de termo geral $u_n = \frac{3n-1}{n+2}$

11.1 Verifica se 2,8 é termo da sucessão.

$$u_n = 2,8 \Leftrightarrow \frac{3n-1}{n+2} = \frac{28}{10} \Leftrightarrow 30n-10 = 28n+56 \Leftrightarrow 2n = 66 \Leftrightarrow n = 33 \in \mathbb{N}$$

Logo, 2,8 é termo da sucessão

11.2 Mostra que u_n é monótona.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3(n+1)-1}{n+1+2} - \frac{3n-1}{n+2} = \frac{3n+2}{n+3} - \frac{3n-1}{n+2} = \frac{3n^2 + 2n + 6n + 4 - 3n^2 + n - 9n + 3}{(n+3)(n+2)} =$$

$$= \frac{17}{\underbrace{(n+3)(n+2)}_{>0}} > 0$$

Logo u_n é monótona crescente

11.3 Mostra que u_n é limitada e indica um minorante e um majorante do conjunto dos seus termos.

Como a sucessão é monótona crescente, então o primeiro termo da sucessão é o mínimo da sucessão.

$$u_1 = \frac{3-1}{1+2} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{3n-1}{n+2} = \frac{3n-6}{n+2} + \frac{5}{n+2} = \frac{3(n-2)}{n+2} + \frac{5}{n+2}$$

$$\text{Assim, } u_n = 3 - \frac{7}{n+2}$$

$$\frac{1}{n+2} \text{ é decrescente e } 0 < \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow 0 < \frac{7}{n+2} \leq \frac{7}{3} \Leftrightarrow -\frac{7}{3} \leq -\frac{7}{n+2} < 0 \Leftrightarrow 3 - \frac{7}{3} \leq 3 - \frac{7}{n+2} < 3 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq u_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo a sucessão é limitada.

Por exemplo: 0 é um minorante e 3 é um majorante.

11.4 Justifica que u_n é convergente.

Toda a sucessão limitada é convergente, logo por 12.3 u_n é convergente

11.5 Mostra, recorrendo à definição de sucessão convergente, que $\lim_n u_n = 3$.

$$\begin{aligned} |u_n - 3| < \delta &\Leftrightarrow \left| \frac{3n-1}{n+2} - 3 \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{3n-1-3n-6}{n+2} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{-7}{n+2} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{7}{n+2} < \delta \Leftrightarrow 7 < n\delta + 2\delta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n\delta > 7 - 2\delta \Leftrightarrow n > \frac{7-2\delta}{\delta} \end{aligned}$$

Assim para $p > \frac{7-2\delta}{\delta}$, tem-se que para $n \geq p$, u_n pertence à vizinhança de 3 e raio δ .

Logo, $\lim u_n = 3$

12. Um auditório tem 14 cadeiras na primeira fila, 18 na segunda e 22 na terceira, e assim sucessivamente.

12.1 Calcula o número de cadeiras na décima segunda fila.

Seja c_n uma sucessão que representa o número de cadeiras.

c_n é uma progressão aritmética de razão 4 e primeiro termo 14.

Portanto, $c_n = 14 + 4(n-1) = 14 + 4n - 4 = 4n + 10$

$c_{12} = 4 \times 12 + 10 = 58$ cadeiras

12.2 O auditório tem 15 filas. Determina a sua lotação máxima.

$$S_{15} = \frac{c_1 + c_{15}}{2} \times 15 = \frac{14 + 70}{2} \times 15 = \frac{84}{2} \times 15 = 42 \times 15 = 630 \text{ lugares}$$

13. Calcula a soma dos 25 primeiros termos de uma progressão aritmética, sabendo que $w_2 + w_4 = 28$ e $w_5 + w_7 = 52$.

$$w_n = w_1 + r(n-1)$$

$$w_2 = w_1 + r \quad w_4 = w_1 + 3r \quad w_5 = w_1 + 4r \quad w_7 = w_1 + 6r$$

$$\begin{cases} w_2 + w_4 = 28 \\ w_5 + w_7 = 52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_1 + r + w_1 + 3r = 28 \\ w_1 + 4r + w_1 + 6r = 52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2w_1 + 4r = 28 \\ 2w_1 + 10r = 52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2w_1 = 28 - 4r \\ 28 - 4r + 10r = 52 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2w_1 = 28 - 4r \\ 6r = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2w_1 = 28 - 16 \\ r = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_1 = 6 \\ r = 4 \end{cases}$$

$$w_1 = 6$$

$$w_{25} = w_1 + 24r = 6 + 24 \times 4 = 102$$

$$S_{25} = \frac{6 + 102}{2} \times 25 = 1350$$



14. Um carpinteiro pretende construir uma estante de livros como a representada na figura.

Os comprimentos das prateleiras são decrescentes e estão em progressão aritmética.

A primeira prateleira mede 1 metro e a última mede 60 centímetros.

Determina o número de prateleiras da estante sabendo que o carpinteiro gastou exatamente 5,6 m lineares de madeira nas prateleiras.



$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$$

$$5,6 \text{ m} = 560 \text{ cm}$$

$$S_N = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n \Leftrightarrow 560 = \frac{100 + 60}{2} \times n \Leftrightarrow 560 = 80n \Leftrightarrow n = \frac{560}{80} \Leftrightarrow n = 7 \text{ prateleiras}$$

15. Prova que a soma de duas progressões aritméticas é ainda uma progressão aritmética de razão igual à soma das razões das progressões iniciais.

Sejam a_n e b_n duas progressões aritméticas de razão r_a e r_b

$$a_n + b_n = a_1 + r_a(n-1) + b_1 + r_b(n-1) = (a_1 + b_1) + (n-1)(r_a + r_b)$$

Que é o termo de uma progressão aritmética de razão $(r_a + r_b)$ e cujo primeiro termo é $(a_1 + b_1)$

16. O número de sócios de um clube de ténis, fundado em 2001, pode ser modelado por uma progressão geométrica.

Devido a um problema informático que registava o número de sócios, perderam-se os registos relativos aos anos iniciais do clube.

No entanto, sabe-se o número de sócios relativamente aos anos de 2013, 2014 e 2015, os quais constam na tabela ao lado.

Ano	N.º de sócios
2013	500
2014	600
2015	720

- 16.1 Determina qual o valor da razão progressão geométrica que determina o número de sócios existentes em cada ano e conclui que o número de sócios aumenta 20% a cada ano que passa.

Seja u_n e a progressão geométrica.

$$r = \frac{u_{14}}{u_{13}} = \frac{600}{500} = \frac{12}{10} = \frac{120}{100} = 120\%$$

Logo o número de sócios aumenta todos os anos 20%

- 16.2 Determina:

- a) Quantos sócios fundaram o clube.

$$u_{13} = u_1 \times r^{13} \Leftrightarrow 500 = u_1 \times \left(\frac{12}{10}\right)^{13} \Leftrightarrow u_1 = \frac{500}{1,2^{13}} \Leftrightarrow u_1 \approx 56,08$$

Portanto o clube foi fundado por 57 sócios

- b) Qual é o número de sócios previstos para o ano de 2025.

$$u_{25} = u_{13} \times 1,2^{25-13} = 500 \times 1,2^{12} \approx 4458,05$$

No ano 2025 prevê-se que o clube tenha 4459 sócios

17. Os três primeiros termos de uma progressão geométrica são dados para um determinado valor de x , respetivamente, por $x-2$, $x+1$ e $x+7$.

Determina o termo geral da sucessão.

$$\frac{x+7}{x+1} = \frac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow (x+7)(x-2) = (x+1)^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2} - 2x + 7x - 14 = \cancel{x^2} + 2x + 1 \Leftrightarrow 3x = 15 \Leftrightarrow x = 5$$

$$\text{Assim, } \frac{5+7}{5+1} = \frac{12}{6} = 2 \text{ e o primeiro termo é } 5-2=3$$

$$\text{Logo, } u_n = 3 \times 2^{n-1}$$

18. Seja u_n uma sucessão monótona crescente e de termos todos positivos.

Considera a sucessão v_n definida por $v_n = \frac{1}{u_n}$.

18.1 Justifique que v_n é convergente

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} < \frac{1}{u_n} = v_n, \forall n \in \mathbb{N} \text{ porque } u_{n+1} > u_n$$

Logo v_n é decrescente. Como u_n é positiva v_n também é positiva.

Assim, 0 é um minorante de v_n . Como v_n é decrescente e minorada, é também convergente.

18.2 Sabendo que $\lim u_n = 2$, determina o valor de:

a) $\lim v_n$

$$\lim v_n = \lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\lim u_n} = \frac{1}{2}$$

b) $\lim [v_n \times (v_n - 2)]$

$$\lim [v_n \times (v_n - 2)] = \lim v_n \times \lim (v_n - 2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} - 2 \right) = -\frac{3}{4}$$

c) $\lim \frac{1}{u_n - 2}$

$$\lim \frac{1}{u_n - 2} = \frac{1}{\lim (u_n - 2)} = \frac{1}{2 - 2} = \frac{1}{0} = -\infty$$

19. Considera as sucessões:

$$u_n = \frac{2n-1}{1+n} ; v_n = 2n^3 - 10 ; w_n = \frac{4}{3n^3-2} \text{ e } x_n = 4 - \sqrt{n+3}$$

19.1 Prova, utilizando a definição de limite, que:

a) $u_n \rightarrow 2$

Dado $\delta > 0$

$$\begin{aligned} |u_n - 2| < \delta &\Leftrightarrow \left| \frac{2n-1}{1+n} - 2 \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{2n-1-2-2n}{1+n} \right| < \delta \Leftrightarrow \left| \frac{-3}{1+n} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{3}{1+n} < \delta \Leftrightarrow 3 < \delta + n\delta \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n\delta > 3 - \delta \Leftrightarrow n > \frac{3-\delta}{\delta} \end{aligned}$$

Assim, basta tomar para $p \in \mathbb{N}$ o primeiro natural superior a $\frac{3-\delta}{\delta}$, e tem-se que,

para $n \geq p$, u_n pertence à vizinhança de 2 de raio δ .

Portanto, $u_n \rightarrow 2$

b) $v_n \rightarrow +\infty$

Dado $L > 0$, tem-se:

$$v_n > L \Leftrightarrow 2n^3 - 10 > L \Leftrightarrow 2n^3 > L + 10 \Leftrightarrow n^3 > \frac{L+10}{2} \Leftrightarrow n > \sqrt[3]{\frac{L+10}{2}}$$

Assim, basta tomar para $p \in \mathbb{N}$ o primeiro natural superior a $\sqrt[3]{\frac{L+10}{2}}$, e tem-se

todos os termos seguintes superiores a L

Portanto $v_n \rightarrow +\infty$

c) $w_n \rightarrow 0$

Dado $\delta > 0$

$$\begin{aligned} |w_n| < \delta &\Leftrightarrow \left| \frac{4}{3n^3-2} \right| < \delta \Leftrightarrow \frac{4}{3n^3-2} < \delta \Leftrightarrow 3n^3 - 2 > \frac{4}{\delta} \Leftrightarrow 3n^3 > \frac{4}{\delta} + 2 \Leftrightarrow n^3 > \frac{4}{3\delta} + \frac{2}{3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n > \sqrt[3]{\frac{4}{3\delta} + \frac{2}{3}} \end{aligned}$$

Assim, basta tomar para $p \in \mathbb{N}$ o primeiro natural superior a $\sqrt[3]{\frac{4}{3\delta} + \frac{2}{3}}$, e tem-se que,

para $n \geq p$, w_n pertence à vizinhança de 0 de raio δ .

Portanto, $w_n \rightarrow 0$

d) $x_n \rightarrow -\infty$

Dado $L > 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} x_n < -L &\Leftrightarrow -x_n > L \Leftrightarrow -4 + \sqrt{n+3} > L \Leftrightarrow \sqrt{n+3} > L+4 \Rightarrow n+3 > (L+4)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n+3 > L^2 + 8L + 16 \Leftrightarrow n > L^2 + 8L + 13 \end{aligned}$$

Assim, basta tomar para $p \in \mathbb{N}$ o primeiro natural superior a $\sqrt[3]{\frac{L+10}{2}}$, e tem-se todos os termos seguintes menores a $-L$.
Portanto $x_n \rightarrow -\infty$

19.2 Determine a ordem p a partir da qual se tem:

a) $|u_n - 2| < 0,01$

Por 20.1 a) temos que $n > \frac{3-\delta}{\delta}$

Logo, $n > \frac{3-0,01}{0,01} \Leftrightarrow n > 299$

Portanto $p = 300$

b) $w_n \in V_{0,1}(0)$

Por 20.1 c) temos que $n > \sqrt[3]{\frac{4}{3\delta} + \frac{2}{3}}$

Logo, $n > \sqrt[3]{\frac{4}{3 \times 0,1} + \frac{2}{3}} \Leftrightarrow n > \sqrt[3]{14} \Leftrightarrow n > 2,41$

Portanto, $p = 3$

19.3. Calcule:

a) $\lim(u_n w_n)$

$\lim(u_n w_n) = 2 \times 0 = 0$

b) $\lim(v_n w_n)$

$$\lim(u_n w_n)^{+\infty \times 0} = \lim(2n^3 - 10) \left(\frac{4}{3n^3 - 2} \right) = \lim \left(\frac{8n^3 - 40}{3n^3 - 2} \right) = \lim \left(\frac{n^3 \left(8 - \frac{40}{n^3} \right)}{n^3 \left(3 - \frac{2}{n^3} \right)} \right) = \frac{8}{3}$$

c) $\lim \frac{x_n}{\sqrt{n}}$

$$\begin{aligned}\lim \frac{x_n}{\sqrt{n}} &= \lim \frac{4 - \sqrt{n+3}}{\sqrt{n}} = \lim \left(\frac{4}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n}} \right) = \lim \left(\frac{4}{\sqrt{n}} - \sqrt{\frac{n+3}{n}} \right) = \\ &= \lim \left(\frac{4}{\sqrt{n}} - \sqrt{1 + \frac{3}{n}} \right) = 0 - \sqrt{1+0} = -1\end{aligned}$$

20. Considera a sucessão definida por:

$$a_n = 5 - \frac{1 - 4n}{2}$$

20.1 Mostra que a_n é uma progressão aritmética e indica a razão.

$$a_{n+1} - a_n = 5 - \frac{1 - 4(n+1)}{2} - 5 + \frac{1 - 4n}{2} = \frac{-1 + 4n + 4 + 1 - 4n}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

20.2 A sucessão é limitada? Justifica a tua resposta.

A sucessão não é limitada porque é uma razão aritmética de razão diferente de zero.

20.3 Prova, usando a definição de limite, que $a_n \mapsto +\infty$.

Dado $L > 0$

$$\begin{aligned}a_n > L &\Leftrightarrow 5 - \frac{1 - 4n}{2} > L \Leftrightarrow -\frac{1 - 4n}{2} > L - 5 \Leftrightarrow \frac{1 - 4n}{2} < -L + 5 \Leftrightarrow 1 - 4n < -2L + 10 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -4n < -2L + 9 \Leftrightarrow 4n > 2L - 9 \Leftrightarrow n > \frac{2L - 9}{4}\end{aligned}$$

Assim, basta tomar $p \in \mathbb{N}$ o primeiro natural superior a $\frac{2L-9}{4}$, e tem-se todos os termos seguintes superiores a L

Portanto, $a_n \rightarrow +\infty$

20.4 Calcula o valor de $a_{20} + a_{21} + \dots + a_{30}$.

$$S_N = \frac{a_{20} + a_{30}}{2} \times 11 = \frac{5 - \frac{1 - 4 \times 20}{2} + 5 - \frac{1 - 4 \times 30}{2}}{2} \times 11 = 599,5$$

20.5 Determina:

a) $\lim (a_n)^2$

$$\lim (a_n)^2 = (+\infty)^2 = +\infty$$

b) $\lim \frac{a_{2n}-a_n}{n}$

$$\lim \frac{a_{2n}-a_n}{n} = \lim \frac{5 - \frac{1-8n}{2} - 5 + \frac{1-4n}{2}}{n} = \lim \frac{-1+8n+1-4n}{2n} = \lim \frac{4n}{2n} = \frac{4}{2} = 2$$

21. Considera a sucessão:

$$b_n = (-1)^n - n$$

21.1 Justifica que a sucessão não é monótona.

$$b_1 = -1 - 1 = -2 \qquad b_2 = 1 - 2 = -1 \qquad b_3 = -1 - 3 = -4$$

$$b_2 < b_1 \text{ e } b_2 > b_3$$

Portanto a sucessão não é monótona

21.2 Prova, utilizando a definição de limite, que $b_n \rightarrow -\infty$

Dado $L > 0$

$$b_n < -L \Leftrightarrow (-1)^n - n < -L$$

Tem-se que $\forall n \in \mathbb{N}, (-1)^n - n < 1 - n$, assim

$$1 - n < -L \Leftrightarrow -n < -L - 1 \Leftrightarrow n > L + 1$$

Assim, basta tomar para $p \in \mathbb{N}$ o primeiro natural superior a $L+1$, e tem-se todos os termos seguintes inferiores a L

Portanto $b_n \rightarrow -\infty$

21.3 Calcula:

b) $\lim (b_n)^2$

$$\lim (b_n)^2 = (-\infty)^2 = +\infty$$

b) $\lim \frac{b_{n+1}}{b_n}$

$$\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{(-1)^{n+1} - (n+1)}{(-1)^n - n} = \lim \frac{(-1)^{n+1} - n - 1}{(-1)^n - n} = \lim \frac{n \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n} - \frac{n}{n} - \frac{1}{n} \right)}{n \left(\frac{(-1)^n}{n} - \frac{n}{n} \right)} = \frac{0 - 1 - 0}{0 - 1} = 1$$

22. Calcula o limite das sucessões cujo termo geral se indica, identificando as indeterminações encontradas:

a) $a_n = \frac{3n-1}{1-2n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{1-2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(3 - \frac{1}{n} \right)}{n \left(\frac{1}{n} - 2 \right)} = \frac{3-0}{0-2} = -\frac{3}{2}$$

b) $b_n = \frac{n^2+2}{3+n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2}{3+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{n^2}{n^2} + \frac{2}{n^2} \right)}{n \left(\frac{3}{n} + \frac{n}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 + \frac{2}{n^2} \right)}{\frac{3}{n} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$$

c) $c_n = \frac{n^3+2n}{n^2+n+1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2n}{n^2+n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 \left(1 + \frac{2}{n^2} \right)}{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$$

d) $d_n = \sqrt{\frac{4n+1}{n}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n+1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n \left(4 + \frac{1}{n} \right)}{n \left(\frac{2}{n} + 1 \right)}} = \sqrt{\frac{4}{1}} = 2$$

e) $e_n = \frac{1-4n}{\sqrt{n^2+5}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-4n}{\sqrt{n^2+5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(\frac{1}{n} - 4 \right)}{\sqrt{n^2 \left(1 + \frac{5}{n^2} \right)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(\frac{1}{n} - 4 \right)}{n \sqrt{1 + \frac{5}{n^2}}} = \frac{-4}{\sqrt{1}} = -4$$

f) $f_n = \frac{n+3}{\sqrt{n} + \sqrt{n^2+1}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{\sqrt{n} + \sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 + \frac{3}{n} \right)}{n \sqrt{\frac{1}{n} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(1 + \frac{3}{n} \right)}{n \left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \right)} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$$

g) $g_n = \sqrt{n^2 + 2} - n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 2} - n)(\sqrt{n^2 + 2} + n)}{\sqrt{n^2 + 2} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2 - n^2}{\sqrt{n^2 + 2} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n^2 + 2} + n} = \frac{2}{+\infty + \infty} = 0$$

h) $h_n = \frac{3^n - 4}{1 - 3^{n+1}}$

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 4}{1 - 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \left(1 - \frac{4}{3^n}\right)}{3^n \left(\frac{1}{3^n} - 3\right)} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$

j) $i_n = 3^n - 4 \times 2^{2n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (3^n - 4 \times 2^{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (3^n - 4 \times 4^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (3^n - 4^{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \left(\frac{3^n}{4^n} - 4\right) = +\infty (0 - 4) = -\infty$$

k) $j_n = \frac{n - \sin n}{n^2 + 2}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \sin n}{n^2 + 2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 2} - \frac{\sin n}{n^2 + 2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2 + 2} \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin n}{n^2 + 2} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(\frac{1}{n} \right)}{n^2 \left(1 + \frac{2}{n^2} \right)} - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin n \times \frac{1}{n^2 + 2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n^2}} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2 + 2} = \frac{\frac{1}{+\infty}}{1 + \frac{2}{\pm\infty}} - \frac{1}{+\infty} = \frac{0}{1 + 0} - 0 = 0 \end{aligned}$$

sen n é limitada

l) $k_n = 4^{-n} (3^n - 2)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (4^{-n} (3^n - 2)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{4^n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{4^n} = 0 - 0 = 0$$

m) $l_n = \frac{\frac{2 + \cos n}{n} - \frac{n^2}{2}}{\frac{2}{n^2} - \frac{3}{n}}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2 + \cos n}{n} - \frac{n^2}{2}}{\frac{2}{n^2} - \frac{3}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n - \cos n}{n^2}}{\frac{2 - 3n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - \cos n}{n - 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2 - 3n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos n \times \frac{1}{2 - 3n} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\frac{2}{n} - 3} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 - 3n} = \frac{2}{\frac{2}{+\infty} - 3} - \frac{1}{+\infty} = \frac{2}{-3} - \frac{1}{+\infty} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

cos n é limitada

23. Considera a sucessão cujos primeiros termos são:

$$2, 20, 200, \dots$$

- 23.1 Escreve o termos geral da sucessão, admitindo que se trata de uma progressão geométrica.

Como se trata de uma progressão geométrica, tem-se que $\frac{200}{20} = 10 = r$

$$\text{Assim, } u_n = u_1 \times r^{n-1} = 2 \times 10^{n-1}$$

- 23.2 Justifica que $u_n \rightarrow +\infty$

Como se trata de uma progressão geométrica de razão maior do que e cujo o primeiro termo é positivo, então $u_n \rightarrow +\infty$

- 23.3 Determina a soma:

$$20\,000 + 200\,000 + \dots + 20\,000\,000\,000$$

$$\left. \begin{array}{ccccccc} 20\,000 & + & 200\,000 & + & \dots & + & 20\,000\,000\,000 \\ 2 \times 10^4 & + & 2 \times 10^5 & + & \dots & + & 2 \times 10^{10} \end{array} \right\} = u_5 + u_6 + \dots + u_{11} =$$

$$= 2 \times 10^4 \times \frac{1 - 10^{11-5+1}}{1-10} = 22\,222\,220\,000$$

24. Em janeiro de 2020 o Frederico decidiu começar uma poupança, depositando no banco 1000 euros. No mês seguinte pôs menos 10% do que tinha posto no mês anterior e assim sucessivamente.

- 24.1 Justifica que o dinheiro que o André deposita no banco, em cada mês é dado pela sucessão definida por

$$b_n = \begin{cases} b_1 = 1000 \\ b_{n+1} = 0,9 \cdot b_n \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

O primeiro depósito é de 1000 €

$$\text{Logo } b_1 = 1000$$

Como em cada mês o André deposita menos 10% do que no mês anterior, isto é, deposita 90% do que depositou no mês anterior.

$$\text{Logo, } b_{n+1} = 0,9 \times b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

- 24.2 Determina um termo geral da sucessão e indica o dinheiro que foi colocado no banco em março de 2022.

A sucessão é uma progressão geométrica de razão 0,90 e de 1.º termo 1000.

$$\text{Logo, } b_n = 1000 \times 0,9^{n-1}.$$

Assim, em março de 2022, o 27.º mês, depositou $b_{27} = 1000 \times 0,9^{26} \approx 64,61$ €

24.3 Para $p \in \mathbb{N}$, determina uma expressão algébrica para a soma S_p dos p primeiros termos desta sucessão.

$$S_p = 1000 \times \frac{1-0,9^p}{1-0,9} = 1000 \times \frac{1-0,9^p}{0,1} = 10000 \times (1-0,9^p)$$

24.4 Determina $\lim s_n$ e interpreta o valor obtido no contexto da situação apresentada.

$$\lim (10000 \times (1-0,9^n)) = 10000 \times (1-0) = 10000$$

Como (S_n) é crescente, é majorada por 10 000. Qualquer que seja a duração da poupança, o valor acumulado nunca ultrapassará os 10 000€

25. A soma S_n dos n primeiros termos da sucessão v_n é dada por:

$$S_n = 2n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

25.1 Justifica que v_n é uma progressão aritmética de razão 4.

$$v_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 - 2(n-1)^2 = 2n^2 - 2(n^2 - 2n + 1) = 2n^2 - 2n^2 + 4n - 2 = 4n - 2$$

Logo, v_n é uma progressão de razão 4

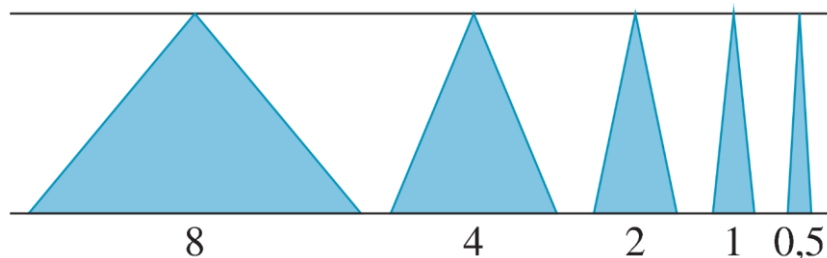
25.2 Determina o termo geral.

$$v_n = 4n - 2$$

25.3 Calcula $\lim \frac{S_n}{(v_n)^2}$

$$\lim \frac{S_n}{(v_n)^2} = \lim \frac{2n^2}{(4n-2)^2} = \lim \frac{2n^2}{16n^2 - 16n + 4} = \lim \frac{2n^2}{n^2 \left(16 - \frac{16}{n} + \frac{4}{n^2} \right)} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

26. Considera a sucessão de triângulos isósceles, de altura h , em que a base do primeiro triângulo mede 8, a do segundo mede 4, a do terceiro mede 2, e assim sucessivamente.



- 26.1 Prova que a sucessão das áreas dos triângulos tem de termo geral $a_n = h \cdot 2^{3-n}$

O comprimento de cada base é uma progressão geométrica (b_n) de primeiro termo 8 e razão $\frac{1}{2}$.

$$\text{Assim, } a_n = \frac{h \times b_n}{2} = \frac{h \times 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{2} = h \times 2^2 \times 2^{1-n} = h 2^{3-n}$$

- 26.2 Determina h se $a_8 = \frac{13}{80}$.

$$a_8 = \frac{13}{80} \Leftrightarrow h \times 2^{3-8} = \frac{13}{80} \Leftrightarrow h = \frac{416}{80} \Leftrightarrow h = 5,2$$

- 26.3 Sabendo que $h = 16$, determina a soma de todas as áreas dos triângulos, ou seja, $\lim S_n$, em que S_n é a soma das áreas dos n primeiros triângulos.

$$a_n = 16 \times 2^{3-n}$$

$$a_1 = 16 \times 2^2 = 64$$

$$S_n = 64 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 64 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} = 128 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$\text{Então, } \lim \left(128 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \right) = 128 \lim \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) = 128 \times (1 - 0) = 128$$