



1. Estuda a monotonia das sucessões a_n e b_n , cujos termos gerais são, $a_n = n + 1$ e $b_n = \frac{3}{n+1}$.

$a_{n+1} - a_n = n + 2 - n - 1 = 1$ como $a_{n+1} - a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ a sucessão é monótona crescente.

$$b_{n+1} - b_n = \frac{3}{n+2} - \frac{3}{n+1} = \frac{3n+3-3n-6}{(n+2)(n+1)} = \frac{-3}{(n+2)(n+1)}, \text{ como } -3 < 0 \wedge (n+2)(n+1) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Então, $\frac{-3}{(n+2)(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$, a sucessão é monótona decrescente.

2. Calcula os três primeiros termos das sucessões definidas como se segue:

2.1 $a_n = \frac{n+1}{2n}$

$$a_1 = \frac{1+1}{2 \times 1} = 1; \quad a_2 = \frac{2+1}{2 \times 2} = \frac{3}{4}; \quad a_3 = \frac{3+1}{2 \times 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

2.2 $b_n = \frac{3n}{n+1}$

$$b_1 = \frac{3 \times 1}{1+1} = \frac{3}{2}; \quad b_2 = \frac{3 \times 2}{2+1} = \frac{6}{3} = 2; \quad b_3 = \frac{3 \times 3}{3+1} = \frac{9}{4}$$

2.3 $c_n = \frac{(-1)^n n}{5n}$

$$c_1 = \frac{(-1)^1 \times 1}{5 \times 1} = -\frac{1}{5}; \quad c_2 = \frac{(-1)^2 \times 2}{5 \times 2} = \frac{1}{5}; \quad c_3 = \frac{(-1)^3 \times 3}{5 \times 3} = -\frac{1}{5}$$

2.4 $d_n = \begin{cases} 1 & , n \geq 3 \\ \frac{2}{n+1} & , n < 3 \end{cases}$

$$d_1 = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1; \quad d_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}; \quad d_3 = 1$$

3. Considera a sucessão a_n de termo geral $a_n = \frac{n+1}{3n}$

- 3.1 Escreve os quatro primeiros termos da sucessão.

$$a_1 = \frac{1+1}{3 \times 1} = \frac{2}{3}; \quad a_2 = \frac{2+1}{3 \times 2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{3+1}{3 \times 3} = \frac{4}{9}; \quad a_4 = \frac{4+1}{3 \times 4} = \frac{5}{12}$$

- 3.2 Escreve o termo de ordem $n + 1$

$$a_{n+1} = \frac{n+1+1}{3(n+1)} = \frac{n+2}{3n+3}$$

- 3.3 Determina $a_{n+1} - a_n$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{n+2}{3n+3} - \frac{n+1}{3n} = \frac{n+2}{3(n+1)} - \frac{n+1}{3n} = \\ &= \frac{n(n+2) - (n+1)(n+1)}{3n(n+1)} = \frac{n^2 + 2n - (n^2 + 2n + 1)}{3n(n+1)} \\ &= \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{3n(n+1)} = \frac{-1}{3n(n+1)} \end{aligned}$$

4. Mostra que as sucessões $a_n = (n - 2)^2$ e $b_n = n^2 - 8n$ não são monótonas.

$$a_1 = (1 - 2)^2 = 1 ; \quad a_2 = (2 - 2)^2 = 0 ; \quad a_3 = (3 - 2)^2 = 1$$

A sucessão (a_n) é não monótona, pois, $a_1 > a_2$ mas $a_2 < a_3$.

$$b_1 = 1^2 - 8 \times 1 = -7 ; \quad b_2 = 2^2 - 8 \times 2 = -12 ;$$

$$b_3 = 3^2 - 8 \times 3 = -13 ; \quad b_4 = 4^2 - 8 \times 4 = -16 ;$$

$$b_5 = 5^2 - 8 \times 5 = -15$$

A sucessão (b_n) é não monótona, pois, $b_3 > b_4$ mas $b_4 < b_5$.

5. Estuda quanto à monotonia as sucessões definidas por:

5.1 $u_n = \frac{n+1}{3n}$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{n+2}{3n+3} - \frac{n+1}{3n} = \frac{n+2}{3(n+1)} - \frac{n+1}{3n} = \\ &= \frac{n(n+2) - (n+1)(n+1)}{3n(n+1)} = \frac{n^2 + 2n - (n^2 + 2n + 1)}{3n(n+1)} \\ &= \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{3n(n+1)} = \frac{-1}{3n(n+1)} \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0$, logo (u_n) é decrescente.

5.2 $w_n = 5 \left(\frac{4}{5}\right)^n$

$$w_{n+1} - w_n = \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} - \left(\frac{4}{5}\right)^n = \left(\frac{4}{5}\right)^n \times \left(\frac{4}{5} - 1\right) = -\frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} - w_n < 0$, logo (w_n) é decrescente.

5.3 $v_n = \frac{3n-4}{n}$

$$v_{n+1} = \frac{3(n+1)-4}{n+1} = \frac{3n-1}{n+1}$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{3n-1}{n+1} - \frac{3n-4}{n} = \frac{n(3n-1) - (n+1)(3n-4)}{n(n+1)} = \\ &= \frac{3n^2 - n - (3n^2 - 4n + 3n - 4)}{n(n+1)} = \frac{3n^2 - n - 3n^2 + n + 4}{n(n+1)} = \frac{4}{n(n+1)} \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n > 0$, logo (v_n) é crescente.

5.4 $t_n = \frac{2n+1}{2n-1}$

$$t_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{2(n+1)-1} = \frac{2n+3}{2n+1}$$

$$t_{n+1} - t_n = \frac{2n+3}{2n+1} - \frac{2n+1}{2n-1} =$$

$$= \frac{(2n-1)(2n+3) - (2n+1)(2n+1)}{(2n+3)(2n-1)} =$$

$$= \frac{4n^2 - 6n - 2n - 3 - (4n^2 + 4n + 1)}{(2n+3)(2n-1)}$$

$$= \frac{4n^2 + 6n - 2n - 3 - 4n^2 - 4n - 1}{(2n+3)(2n-1)} = \frac{-4}{(2n+3)(2n-1)}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, t_{n+1} - t_n > 0$, logo (t_n) é decrescente.

6. Considera uma sucessão de figuras, das quais se apresentam a seguir as quatro primeiras, para ilustrar a respetiva lei de formação. Nesta sucessão de figuras, os quadros maiores têm 16 cm de lado e cada figura, a partir da segunda, está dividida em quadrados geometricamente iguais.



- 6.1 Escreve os primeiros cinco termos das sucessões seguintes:

Q_n : Número de quadrados de cada figura.

Q_n : 1, 4, 9, 16, 25

L_n : Comprimento dos lados do quadrado colorido em cada figura.

L_n : 16, 8, $\frac{16}{3}$, 4, $\frac{16}{5}$

A_n : Área do quadrado colorido em cada figura.

A_n : 256, 64, $\frac{256}{9}$, 16, $\frac{256}{25}$

P_n : Perímetro do quadrado colorido em cada figura.

$$P_n: 64, 32, \frac{64}{3}, 16, \frac{64}{5}$$

6.2 Escreve o termo geral de cada uma das sucessões anteriores.

$$Q_n = n^2; \quad L_n = \frac{16}{n}; \quad A_n = \left(\frac{16}{n}\right)^2; \quad P_n = \frac{64}{n}$$

6.3 Estuda cada uma das sucessões anteriores em relação à monotonia.

$$Q_{n+1} - Q_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

$\forall n \in \mathbb{N}, Q_{n+1} - Q_n > 0$, logo (Q_n) é crescente.

$$\begin{aligned} L_{n+1} - L_n &= \frac{16}{n+1} - \frac{16}{n} = \frac{16n - 16(n+1)}{n(n+1)} = \\ &= \frac{16n - 16n - 16}{n(n+1)} = \frac{-16}{n(n+1)} \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, L_{n+1} - L_n < 0$, logo (L_n) é decrescente.

$$\begin{aligned} A_{n+1} - A_n &= \left(\frac{16}{n+1}\right)^2 - \left(\frac{16}{n}\right)^2 = \frac{16^2 n^2 - 16^2 (n+1)^2}{(n+1)^2} = \\ &= \frac{16^2 n^2 - 16^2 (n^2 + 2n + 1)}{(n+1)^2} = \frac{16^2 n^2 - 16^2 n^2 - 16^2 (2n + 1)}{(n+1)^2} \\ &= \frac{-16^2 (2n + 1)}{(n+1)^2} = \frac{-256 (2n + 1)}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} - A_n < 0$, logo (A_n) é decrescente.

$$\begin{aligned} P_{n+1} - P_n &= \frac{64}{n+1} - \frac{64}{n} = \frac{64n - 64(n+1)}{n(n+1)} = \\ &= \frac{64n - 64n - 64}{n(n+1)} = \frac{-64}{n(n+1)} \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} - P_n < 0$, logo (P_n) é decrescente.

6.4 As sucessões acima definidas são ou não limitadas?

(Q_n) é não limitada, pois não tem majorantes.

(L_n) é limitada pois, por exemplo, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < L_n \leq 16$.

(A_n) é limitada pois, por exemplo, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < A_n \leq 256$.

(P_n) é limitada pois, por exemplo, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < P_n \leq 64$.

7. Considera a sucessão $a_n = \frac{5}{\sqrt{n+2}}$

7.1 Mostra que a sucessão é monótona decrescente.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{5}{\sqrt{n+1}+2} - \frac{5}{\sqrt{n+2}} = \\ &= \frac{5(\sqrt{n+2}) - 5(\sqrt{n+1}+2)}{(\sqrt{n+1}+2)(\sqrt{n+2})} = \frac{5(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})}{\underbrace{(\sqrt{n+1}+2)(\sqrt{n+2})}_{>0}} \end{aligned}$$

< 0 porque $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n < 0$, logo (a_n) é monótona decrescente.

7.2 A sucessão é limitada? Justifica a tua resposta.

Por um lado, tem-se $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$. Por outro lado, como a sucessão é decrescente, tem como majorante o 1.º termo. Assim, tem-se $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n \leq \frac{5}{3}$. Logo (a_n) é limitada.

8. Seja a sucessão de termo geral $u_n = \frac{3n-2}{n+1}$

8.1 Determina u_1

$$u_1 = \frac{3 \times 1 - 2}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

8.2 Determina o termo de ordem 3 da sucessão u_n

$$u_3 = \frac{3 \times 3 - 2}{3 + 1} = \frac{7}{4}$$

8.3 Determina $u_{n+1} - u_n$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3(n+1)-2}{n+1+1} - \frac{3n-2}{n+1} = \frac{3n+1}{n+2} - \frac{3n-2}{n+1} = \\ &= \frac{(3n+1)(n+1) - (n+2)(3n-2)}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{3n^2 + 3n + n + 1 - (3n^2 + 2n - 6n - 4)}{(n+1)(n+2)} = \frac{5}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

8.4 O que podes concluir da monotonia da sucessão u_n ?

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$; logo, a sucessão é crescente.

8.5 A sucessão é limitada? Justifica.

Como (u_n) é crescente, o primeiro termo é um minorante.

Para determinar um majorante, comecemos por escrever

u_n na forma $a + \frac{b}{n+1}$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$.

$$\begin{array}{r} 3n-2 \\ -3n-3 \\ \hline -5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \boxed{n+1} \\ 3 \end{array}$$

$$u_n = 3 - \frac{5}{n+1}$$

Da análise desta expressão concluímos que $u_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, temos que (u_n) é limitada pois $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} \leq u_n < 3$.

9. Considera a sucessão definida por $v_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$
9.1 Indica os seis primeiros termos da sucessão.

$$v_1 = 2 + \frac{(-1)^1}{1} = 2 - 1 = 1; \quad v_2 = 2 + \frac{(-1)^2}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2};$$

$$v_3 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}; \quad v_4 = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}; \quad v_5 = 2 - \frac{1}{5} = \frac{9}{5}; \quad v_6 = 2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6}$$

9.2 O que podes concluir da monotonia da sucessão?

A sucessão não é monótona pois $v_1 < v_2$ mas $v_2 > v_3$.

9.3 Mostra que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq v_n \leq \frac{5}{2}$

Os termos de ordem par são dados pela expressão $2 + \frac{1}{n}$.

Para n par, temos $2 < v_n \leq \frac{5}{2}$
 $\left(v_n \leq \frac{5}{2}, \text{ pois } (v_n), \text{ com } n \text{ par, é decrescente} \right).$

Os termos de ordem ímpar são dados pela expressão $2 - \frac{1}{n}$.

Para n ímpar, temos $1 \leq v_n < 2$

$(v_n \geq 1, \text{ pois } (v_n), \text{ com } n \text{ ímpar, é crescente})$.

Conclui-se, portanto, que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq v_n \leq \frac{5}{2}$.

