



1. Considera a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \frac{n}{7-2n}$.

- 1.1. Determina os quatro primeiros termos da sucessão.

$$u_1 = \frac{1}{7-2} = \frac{1}{5}; u_2 = \frac{2}{7-4} = \frac{2}{3}; u_3 = \frac{3}{7-6} = 3 \text{ e } u_4 = \frac{4}{7-8} = -4$$

- 1.2. Verifica se -1 é termo da sucessão. Em caso afirmativo, indica a respetiva ordem.

$$u_n = -1 \Leftrightarrow \frac{n}{7-2n} = -1 \Leftrightarrow n = -7 + 2n \Leftrightarrow n = 7$$

-1 é termo da sucessão e a ordem é 7.

- 1.3. Considera a expressão $u_{n+1} - u_n$.

- a) Mostra que $u_{n+1} - u_n = \frac{7}{(5-2n)(7-2n)}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{7-2(n+1)} - \frac{n}{7-2n} = \frac{(n+1)(7-2n)-n(5-2n)}{(5-2n)(7-2n)} = \frac{7}{(5-2n)(7-2n)}$$

- b) Recorre ao resultado obtido em a) e calcula $(u_4 - u_3)(u_5 - u_4)$.

A sucessão (u_n) é monótona? Justifica.

$$(u_4 - u_3)(u_5 - u_4) = \frac{7}{(5-2 \times 3)(7-2 \times 3)} \times \frac{7}{(5-2 \times 4)(7-2 \times 4)} < 0$$

$u_4 - u_3 = -7$. A sucessão não é crescente.

$u_5 - u_4 = \frac{7}{3}$. A sucessão não é decrescente.

Conclui-se que (u_n) não é monótona.

2. Considera a sucessão (v_n) de termo geral $v_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$.

2.1. Considera o conjunto dos termos da sucessão e mostra que:

$$v_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}. \text{ Então, } \begin{cases} \frac{n}{n+1} & \text{se } n \text{ par} \\ \frac{-n}{n+1} & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

a) 1 é majorante;

Se n é ímpar, $u_n < 0$. Se n é par, $u_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ e $1 - \frac{1}{n+1} < 1$.

Assim, tem-se: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 1$.

b) -1 é minorante.

Se n é par, $u_n > 0$. Se n é ímpar, $u_n = \frac{-n}{n+1} = -1 + \frac{1}{n+1}$ e $-1 + \frac{1}{n+1} > -1$.

Assim, tem-se: $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > -1$.

- 2.2. Mostra que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \geq \frac{1}{2}$.

$$|u_n| \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| \frac{-n}{n+1} \right| \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2n \geq n+1 \Leftrightarrow n \geq 1$$

3. Considera as sucessões (w_n) e (t_n) tais que:

$$w_n = \frac{2n+1}{n+3} \quad \text{e} \quad t_n = 3n^2 + 1$$

Mostra que:

3.1. (w_n) é monótona e limitada;

$$w_{n+1} - w_n = \frac{2n+3}{n+4} - \frac{2n+1}{n+3} = \frac{5}{(n+4)(n+3)}. \quad \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} - w_n > 0$$

A sucessão (w_n) é monótona crescente. O 1.º termo é minorante da sucessão.

$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = 2 - \frac{5}{n+3}$. Daqui resulta que $\forall n \in \mathbb{N}, w_n < 2$.

Assim, tem-se: $\forall n \in \mathbb{N}, w_1 \leq w_n < 2$. Ou seja, (w_n) é limitada.

3.2. (t_n) não é limitada.

$$t_n = 2n^2 + 1$$

(t_n) é crescente. Provar que (t_n) não é limitada equivale a provar que não é majorada.

$$\forall L > 0, \exists p \in \mathbb{N} : u_p > L$$

$$u_p > L \Leftrightarrow 2p^2 + 1 > L \Leftrightarrow p^2 > \frac{L-1}{2}. \text{ Considere } L > 1 \text{ e tem-se } p > \sqrt{\frac{L-1}{2}}.$$

4. Observa a figura que representa 33 fichas numeradas de 40 a 72.

4.1. Nas fichas azuis estão representados os sete primeiros termos de uma progressão aritmética crescente (u_n) .

Determina:

a) o termo geral da sucessão (u_n) ;

Observa-se que $u_1 = 41$, $u_2 = 46$, $u_3 = 51$, $u_4 = 56$ e $u_5 = 61$.

(u_n) é uma progressão aritmética de razão 5, tal que $u_1 = 41$.

Sabendo que $u_n = u_1 + (n - 1) \times r$, tem-se:

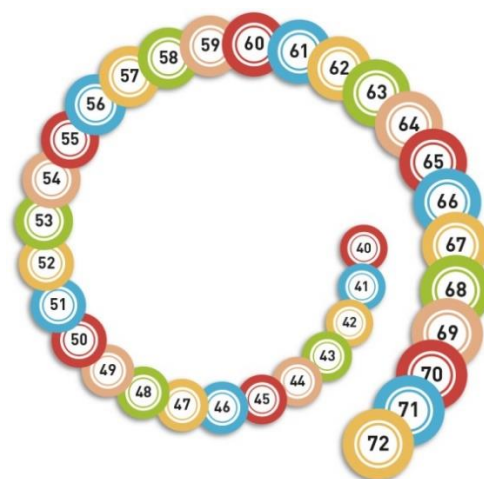
$$u_n = 41 + (n - 1) \times 5 = 41 + 5n - 5 = 5n + 36.$$

O termo geral é $u_n = 5n + 36$.

b) o termo de ordem 20.

Atendendo a que $u_n = 5n + 36$, tem-se $u_{20} = 5 \times 20 + 36 = 136$.

O termo de ordem 20 é 136.



- 4.2. Nas fichas verdes estão representados os seis primeiros termos de uma progressão aritmética decrescente (v_n) .

Determina:

- a) o termo geral da sucessão (v_n) ;

Como a sucessão é decrescente, tem-se $v_1 = 68$, $v_2 = 63$, $v_3 = 58$ e $v_4 = 53$.

Trata-se de uma progressão aritmética de razão -5 .

$$v_n = 68 + (n - 1) \times (-5) = 68 - 5n + 5 = -5n + 73$$

O termo geral é $v_n = -5n + 73$.

- b) a soma dos 30 termos consecutivos a começar no 10.º termo.

Se pretendemos somar 30 termos consecutivos a começar no 10.º termo, o último a ser adicionado é o 39.º termo.

$$v_{10} = -5 \times 10 + 73 = 23; v_{39} = -5 \times 39 + 73 = -122; S_{30} = \frac{23 - 122}{2} \times 30 = -1485$$

A soma dos 30 termos consecutivos a começar no 10.º termo é -1485 .

5. Considera a progressão aritmética (u_n) definida por:

$$u_1 = k \wedge \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - 4$$

Determina k , sabendo que $u_{12} = -45$.

Como $u_{n+1} = u_n - 4 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = -4$, conclui-se que (u_n) é uma progressão aritmética de razão -4 .

$$u_{12} = -45 \Leftrightarrow u_1 + (12 - 1) \times (-4) = -45 \Leftrightarrow k - 44 = -45 \Leftrightarrow k = -1$$

6. Considera a progressão geométrica (v_n) definida por:

$$v_1 = -8 \wedge \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{v_n}{2}$$

6.1. Indica a razão da progressão geométrica e escreve o termo geral.

Sabe-se que $v_1 = -8 \wedge \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{v_n}{2}$.

Como $v_{n+1} = \frac{v_n}{2} \Leftrightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{2}$, conclui-se que a razão da progressão geométrica é $\frac{1}{2}$.

Como $v_n = v_1 \times r^{n-1}$, tem-se $v_n = -8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{2^3}{2^{n-1}} = -\frac{1}{2^{n-4}}$.

Então, $v_n = -\frac{1}{2^{n-4}}$.

6.2. Calcula a soma dos dez primeiros termos da progressão geométrica.

Sabe-se que $S_n = v_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$.

Então, $S_{10} = -8 \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = -16 \times \left(1 - \frac{1}{1024}\right) = -16 \times \frac{1023}{1024} = -\frac{1023}{64}$.

A soma dos dez primeiros termos da progressão geométrica é $-\frac{1023}{64}$.