

Escola Múltipla

1. Considera o intervalo $A = [2, 10[$. O conjunto dos minorantes e o conjunto dos majorantes de A são, respetivamente:

(A) $] -\infty, 2]$ e $[9, +\infty[$

(B) $] -\infty, 2]$ e $\{10\}$

(C) $] -\infty, 2]$ e $[10, +\infty[$

(D) $] -\infty, 2]$ e $]10, +\infty[$

O conjunto dos minorantes de A é $] -\infty, 2]$ e o conjunto dos majorantes é $[10, +\infty[$. C

2. Seja $A = \{x \in \mathbb{R}: |x| \leq 2\}$. Pode afirmar-se que:

(A) o mínimo de A é -2 e A não tem máximo.

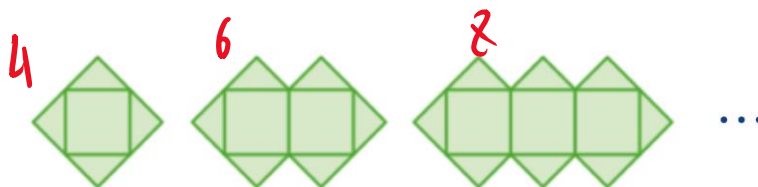
(B) A não tem mínimo e o máximo de A é 2 .

(C) A não tem mínimo nem máximo.

(D) o mínimo de A é -2 e o máximo de A é 2 .

O mínimo de A é -2 e o máximo de A é 2 . D

3. Considera a sequência de figuras, da qual se apresentam as três primeiras.



Quantos triângulos terá a 10ª figura da sequência, considerando a lei de formação sugerida?

(A) 40

(B) 22

(C) 20

(D) 32

Termo geral da sucessão é $2n+2$.

10ª figura é $2 \times 10 + 2 = 22$ B

4. Seja (a_n) uma sucessão crescente, tal que $a_4 = 0$. O valor de $a_3 \times a_5$ pode ser:

(A) 4

(B) -4

(C) 0

(D) 1

Como a sucessão é crescente e $a_4 = 0$ então $a_3 < 0$ e $a_5 > 0$, logo $a_3 \times a_5 < 0$. B

5. O termo geral da sucessão 0, 7, 26, 63, 124, 215, ... pode ser:

(A) $7n + 1$

(B) $n^2 + 6$

(C) $2n - 2$

(D) $n^3 - 1$

(A) $7 \times 1 + 1 = 8$

(B) $1^2 + 6 = 7$

(C) $2 \times 1 - 2 = 0$; $2 \times 2 - 2 = 2$

(D) $1^3 - 1 = 0$; $2^3 - 1 = 7$; $3^3 - 1 = 26$; $4^3 - 1 = 63$
 $5^3 - 1 = 124$; $6^3 - 1 = 215$ D

6. A sucessão de termo geral $(-1)^n + n$ é:

(A) crescente

(B) decrescente

(C) não monótona

(D) crescente em sentido lato

$(-1)^1 + 1 = 0$; $(-1)^2 + 2 = 3$; $(-1)^3 + 3 = 2$

logo a sucessão é não monótona C

7. Considera a sucessão de termo geral $a_n = \frac{5n-1}{n}$

De entre as afirmações seguintes escolhe a correta.

- (A) A sucessão (a_n) é crescente e limitada.
 (B) A sucessão (a_n) é decrescente e é não limitada.
 (C) A sucessão (a_n) é decrescente e limitada.
 (D) A sucessão (a_n) é crescente e é não limitada.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{5(n+1)-1}{n+1} - \frac{5n-1}{n} = \frac{5n+4}{n+1} - \frac{5n-1}{n} = \\ &= \frac{n(5n+4) - (n+1)(5n-1)}{(n+1)n} = \\ &= \frac{5n^2 + 4n - 5n^2 + n - 5n + 1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0 \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n > 0$, ou seja a_n é crescente

$$a_n = \frac{5n-1}{n} = 5 - \frac{1}{n}$$

$$\begin{array}{r} 5n-1 \\ -5n \\ \hline 0-1 \end{array} \quad \frac{1n}{5}$$

$\frac{1}{n}$ é o termo geral de uma sucessão decrescente de termos positivos. Então um majorante é o primeiro termo 1 e um minorante é 0.

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Leftrightarrow 0 > -\frac{1}{n} \geq -1 \Leftrightarrow -1 \leq -\frac{1}{n} < 0$$

$$\Leftrightarrow 5-1 \leq 5-\frac{1}{n} < 5 \Leftrightarrow 4 \leq 5-\frac{1}{n} < 5$$

A sucessão é limitada, $\forall n \in \mathbb{N}$, $4 < a_n \leq 5$

A

8. Considera a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \frac{n-3}{1+n}$. Pode afirmar-se que:

(A) a sucessão (u_n) tem todos os termos positivos.

(B) a sucessão (u_n) é decrescente.

(C) -1 é minorante da sucessão (u_n) .

(D) o centésimo termo é igual a 97.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{n+1-3}{1+n+1} - \frac{n-3}{1+n} = \frac{n-2}{n+2} - \frac{n-3}{1+n} \\ &= \frac{(n-2)(1+n) - (n-3)(n+2)}{(n+2)(1+n)} \\ &= \frac{n^2+n-2n-2 - (n^2-3n+2n-6)}{(n+2)(1+n)} \\ &= \frac{n^2-n-2-n^2+n+6}{(n+2)(1+n)} = \frac{4}{(n+2)(1+n)} > 0 \end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$, logo a sucessão é crescente.

$$u_n = \frac{n-3}{1+n} = 1 - \frac{4}{n+1}$$

$$\begin{array}{r} n-3 \\ -n-1 \\ \hline -4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \overline{) n+1} \\ 1 \end{array}$$

$\frac{4}{n+1}$ é termo geral de uma sucessão decrescente então o 1º termo é majorante e um minorante é 0.

$$0 < \frac{4}{n+1} \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq -\frac{4}{n+1} < 0 \Leftrightarrow -1 \leq 1 - \frac{4}{n+1} < 1$$

A sucessão é limitada $-1 \leq u_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Resposta Aberta

9. Considera a sucessão (u_n) cujo termo geral é $u_n = -n^2 + 8n$

9.1 Calcula os cinco primeiros termos da sucessão (u_n) .

$$u_1 = -1^2 + 8 = 7 \quad ; \quad u_2 = -2^2 + 16 = 12$$

$$u_3 = -3^2 + 24 = 15 \quad ; \quad u_4 = -4^2 + 32 = 16$$

$$u_5 = -5^2 + 40 = 15$$

9.2 Verifica se -20 é termo da sucessão.

$$-n^2 + 8n = -20 \Leftrightarrow n^2 - 8n - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 80}}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{8 \pm 12}{2} \quad \begin{array}{l} \frac{20}{2} = 10 \\ -\frac{4}{2} = -2 \end{array}$$

$$-2 \notin \mathbb{N} \quad ; \quad 10 \in \mathbb{N}$$

-20 é o termo de ordem 10.

9.3 Determina a ordem a partir da qual os termos de (u_n) são negativos.

Temos $-n^2 + 8n = 0 \Leftrightarrow n(-n + 8) = 0 \Leftrightarrow n = 0 \vee n = 8$.

A parábola definida por $y = -x^2 + 8x$ tem a concavidade voltada para baixo; logo, em $\mathbb{N}$, $-n^2 + 8n < 0$ é equivalente a $\{n \in \mathbb{N} : n > 8\} = \mathbb{N}_9$.

Os termos da sucessão são negativos a partir do termo de ordem 9.

9.4 A sucessão (u_n) é monótona? Justifica.

A sucessão é não monótona porque $u_3 < u_4$ mas $u_4 > u_5$.

10. Considera a sucessão (v_n) de termo geral $v_n = \frac{n+5}{2n}$.

10.1 Calcula os quatro primeiros termos da sucessão (v_n) .

$$v_1 = \frac{1+5}{2 \times 1} = 3 ; v_2 = \frac{2+5}{2 \times 2} = \frac{7}{4} ;$$

$$v_3 = \frac{3+5}{2 \times 3} = \frac{4}{3} ; v_4 = \frac{4+5}{2 \times 4} = \frac{9}{8}$$

10.2 Determina a ordem a partir da qual os termos são inferiores a $\frac{3}{4}$.

$$\begin{aligned} \frac{n+5}{2n} < \frac{3}{4} &\Leftrightarrow \frac{n+5}{2n_{(2)}} - \frac{3}{4_{(n)}} \Leftrightarrow \frac{2(n+5) - 3n}{2 \times 2n} < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{10-n}{4n} < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 10-n < 0 \quad (\text{porque } 4n > 0, \forall n \in \mathbb{N}) \\ &\Leftrightarrow n > 10 \end{aligned}$$

Os termos da sucessão são inferiores a $\frac{3}{4}$ a partir de $n = 11$.

10.3 Determina o termo de ordem 20 da sucessão (v_n) .

$$v_{20} = \frac{20+5}{2 \times 20} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$$

10.4 A sucessão (v_n) é limitada? Justifica.

$$v_n = \frac{n+5}{2n} = \frac{n}{2n} + \frac{5}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2n}$$

$\frac{5}{2n}$ é o termo geral de uma sucessão decrescente de termos positivos. Então, um majorante é o primeiro termo, $\frac{5}{2}$, e um minorante é 0.

$$0 < \frac{5}{2n} \leq \frac{5}{2} \iff \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{5}{2n} \leq 3 \iff \frac{1}{2} < v_n \leq 3$$

A sucessão (v_n) é limitada, porque $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{2} < v_n \leq 3$.

11. Considera a sucessão de termo geral $u_n = \frac{2n-5}{n+2}$.

11.1 Determina o termo de ordem 10 e o termo de ordem 20.

$$u_{10} = \frac{2 \times 10 - 5}{10 + 2} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}; \quad u_{20} = \frac{2 \times 20 - 5}{20 + 2} = \frac{35}{22}$$

11.2 Mostra que a sucessão é monótona.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2(n+1)-5}{n+1+2} - \frac{2n-5}{n+2} = \frac{2n-3}{n+3} - \frac{2n-5}{n+2} = \\ &= \frac{(2n-3)(n+2) - (2n-5)(n+3)}{(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{2n^2 + 4n - 3n - 6 - (2n^2 + 6n - 5n - 15)}{(n+2)(n+3)} \\ &= \frac{2n^2 + n - 6 - 2n^2 - n + 15}{(n+2)(n+3)} = \frac{9}{(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

Temos que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$, ou seja,
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$, o que prova que (u_n) é crescente.

11.3 Mostra que a sucessão é limitada.

Vamos começar por decompor o termo geral $u_n = \frac{2n-5}{n+2}$ através do algoritmo da divisão.

$$\begin{array}{r} 2n-5 \quad | \quad n+2 \\ \underline{-2n-4} \quad | \quad 2 \\ -9 \end{array}$$

$$u_n = 2 - \frac{9}{n+2}$$

$\frac{9}{n+2}$ é o termo geral de uma sucessão decrescente de termos positivos.

Então, um majorante é o primeiro termo, 3, e um minorante é 0.

$$0 < \frac{9}{n+2} \leq 3 \Leftrightarrow 0 > -\frac{9}{n+2} \geq -3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 > 2 - \frac{9}{n+2} \geq -1 \Leftrightarrow -1 \leq u_n < 2$$

A sucessão (u_n) é limitada, porque $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq u_n < 2$.

12. Considera a sucessão de termo geral $u_n = \frac{5n+5}{3n}$.

12.1 Determina u_1 .

$$u_1 = \frac{5 \times 1 + 5}{3 \times 1} = \frac{10}{3}$$

12.2 Determina $u_{n+1} - u_n$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{5(n+1)+5}{3(n+1)} - \frac{5n+5}{3n} = \frac{5n+10}{3(n+1)} - \frac{5n+5}{3n} = \\ &= \frac{n(5n+10) - (5n+5)(n+1)}{3n(n+1)} \\ &= \frac{5n^2 + 10n - (5n^2 + 5n + 5n + 5)}{3n(n+1)} \\ &= \frac{5n^2 + 10n - 5n^2 - 10n - 5}{3n(n+1)} = -\frac{5}{3n(n+1)} \end{aligned}$$

12.3 O que podes concluir acerca da monotonia da sucessão (u_n) ?

Temos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$, ou seja,
 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$, o que prova que (u_n) é decrescente.

12.4 Determina o termo de ordem 3 da sucessão (u_n) .

$$u_3 = \frac{5 \times 3 + 5}{3 \times 3} = \frac{20}{9}$$

12.5 A sucessão é limitada? Justifica.

$$u_n = \frac{5n+5}{3n} = \frac{5n}{3n} + \frac{5}{3n} = \frac{5}{3} + \frac{5}{3n}$$

$\frac{5}{3n}$ é o termo geral de uma sucessão decrescente de termos positivos. Então, um majorante é o primeiro termo, $\frac{5}{3}$, e um minorante é 0.

$$0 < \frac{5}{3n} \leq \frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{5}{3} < \frac{5}{3} + \frac{5}{3n} \leq \frac{10}{3} \Leftrightarrow \frac{5}{3} < u_n \leq \frac{10}{3}$$

A sucessão (u_n) é limitada, porque $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{5}{3} < u_n \leq \frac{10}{3}$.

13. Uma sucessão (a_n) satisfaz a seguinte condição:

$$a_{n+1} - a_n = -n^2 + 11n - 30, \forall n \in \mathbb{N}$$

13.1 O que podes concluir acerca da sua monotonia? Justifica.

Estudemos o sinal da expressão $-n^2 + 11n - 30$.

Temos:

$$\begin{aligned} -n^2 + 11n - 30 = 0 &\Leftrightarrow n = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \times (-1) \times (-30)}}{2 \times (-1)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n = \frac{-11 \pm 1}{-2} \Leftrightarrow n = 5 \vee n = 6 \end{aligned}$$

A expressão $-n^2 + 11n - 30$ é nula para $n = 5$ e $n = 6$.
 Para outros valores de $n \in \mathbb{N}$, é negativa (a parábola definida por $y = -x^2 + 8x$ tem a concavidade voltada para baixo).

Concluindo, $\forall n \in \mathbb{N}$, $-n^2 + 11n - 30 \leq 0$. Logo,
 $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n \leq 0$ ou seja, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leq a_n$,
 o que prova que (a_n) é decrescente em sentido lato.

13.2 Sabe-se que a sucessão (a_n) tem três termos consecutivos iguais. Determina a ordem desses termos.

Tendo em conta que $-n^2 + 11n - 30 = 0 \iff n = 5 \vee n = 6$, sabemos que $a_{n+1} - a_n = 0 \iff n = 5 \vee n = 6$, pelo que $a_5 = a_6$ e $a_6 = a_7$.

Os termos de (a_n) de ordens 5, 6 e 7 são iguais.

14. Sabe-se acerca de uma sucessão (v_n) , que $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \frac{5}{(2n+11)(2n+3)}$.

14.1 O que podes concluir acerca da monotonia da sucessão?

A expressão $\frac{5}{(2n+11)(2n+3)}$ é positiva para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Assim, a sucessão (v_n) é crescente, pois $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n > 0$.

14.2 Indica o valor da afirmação: « v_6 é um dos minorantes da sucessão».

A afirmação é falsa, pois a sucessão é crescente e, portanto, o 1.º termo é o maior dos seus minorantes.

15. Considera a sucessão de termo geral $u_n = \frac{n+1}{1-2n}$.

Mostra que existe um número real positivo L , tal que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq L$.

Mostremos que a sucessão é limitada.

Vamos começar por decompor o termo geral $u_n = \frac{n+1}{1-2n}$ através do algoritmo da divisão.

$$\begin{array}{r} n+1 \quad | -2n+1 \\ -n + \frac{1}{2} \\ \hline \frac{3}{2} \end{array}$$

$$u_n = \frac{n+1}{1-2n} = -\frac{1}{2} + \frac{\frac{3}{2}}{1-2n} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2-4n} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4n-2}$$

$\frac{3}{4n-2}$ é o termo geral de uma sucessão decrescente de termos positivos. Então, um majorante é o primeiro termo, $\frac{3}{2}$, e um minorante é 0.

$$0 < \frac{3}{4n-2} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 0 > -\frac{3}{4n-2} \geq -\frac{3}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 > -\frac{1}{2} - \frac{3}{4n-2} \geq -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq -\frac{1}{2} - \frac{3}{4n-2} < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -2 \leq u_n < -\frac{1}{2}$$

Temos, portanto, $\forall n \in \mathbb{N}$, $-2 \leq u_n < -\frac{1}{2}$ e podemos escrever $\forall n \in \mathbb{N}$, $-2 \leq u_n \leq 2$, ou seja, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq 2$.

Assim, existe $L \in \mathbb{R}$, tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq L$, bastando considerar qualquer número $L \geq 2$.

16. Estuda, quanto à monotonia, cada uma das sucessões de termo geral:

16.1 $a_n = \frac{1}{n+3}$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{n+1+3} - \frac{1}{n+3} = \frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+3} = \\ &= \frac{n+3-(n+4)}{(n+3)(n+4)} = -\frac{1}{(n+3)(n+4)} \end{aligned}$$

Temos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n < 0$, ou seja,
 $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} < a_n$, o que prova que (a_n) é decrescente.

16.2 $b_n = 1 + |n - 5|$

$$b_4 = 1 + |4 - 5| = 2 ; \quad b_5 = 1 + |5 - 5| = 1 ; \quad b_6 = 1 + |6 - 5| = 2$$

A sucessão (b_n) é não monótona porque $b_4 > b_5$ mas
 $b_5 < b_6$.

16.3
$$c_n = \begin{cases} \frac{1+2n}{2n+6} & \text{se } n \text{ é par} \\ n+1 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

$$c_1 = 1 + 1 = 2 ; \quad c_2 = \frac{1+2 \times 2}{2 \times 2 + 6} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} ; \quad c_3 = 3 + 1 = 4$$

A sucessão (c_n) é não monótona porque $c_1 > c_2$ mas $c_2 < c_3$.

17. Mostra que as sucessões (u_n) e (v_n) de termos gerais, respetivamente,

$$u_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{se } n > 5 \\ 3 & \text{se } n \leq 5 \end{cases} \quad \text{e} \quad v_n = \begin{cases} \frac{n-1}{n} & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 2 + \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

são limitadas.

Os cinco primeiros termos da sucessão (u_n) são iguais a 3 e, a partir do 6.º termo a sucessão é definida por $-\frac{1}{n}$, termo geral de uma sucessão crescente de termos negativos. Assim, $\forall n \in \mathbb{N}_6, -\frac{1}{6} \leq -\frac{1}{n} < 0$. Considerando os termos todos da sucessão, temos: $\forall n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{6} \leq u_n \leq 3$. Logo (u_n) é limitada.

Quanto à sucessão (v_n) , tem-se:

para n ímpar,

$$\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Leftrightarrow 0 > -\frac{1}{n} \geq -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 > 1 - \frac{1}{n} \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 1 - \frac{1}{n} < 1;$$

para n par,

$$0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Leftrightarrow 2 < 2 + \frac{1}{n} \leq 3.$$

Considerando os majorantes e minorantes dos termos de ordem par e dos termos de ordem ímpar, concluímos que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq v_n \leq 3$. Logo (v_n) é limitada.

18. Considera a sucessão (u_n) definida pelo seu termo geral, $u_n = \frac{2n-1}{n+3}$.

18.1 Estuda a sucessão quanto à monotonia.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2(n+1)-1}{n+1+3} - \frac{2n-1}{n+3} = \\ &= \frac{2n+1}{n+4} - \frac{2n-1}{n+3} = \frac{(2n+1)(n+3) - (2n-1)(n+4)}{(n+4)(n+3)} = \\ &= \frac{2n^2 + 6n + n + 3 - (2n^2 + 8n - n - 4)}{(n+4)(n+3)} = \frac{7}{(n+4)(n+3)} \end{aligned}$$

A sucessão (u_n) é crescente pois $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$.

18.2 Mostra que a sucessão é limitada.

Como (u_n) é crescente,

$$u_n \geq u_1 = \frac{1}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$u_n = \frac{2n-1}{n+3} = 2 - \frac{7}{n+3}$$

$$\begin{array}{r} 2n-1 \\ -2n-6 \\ \hline -7 \end{array} \quad \begin{array}{r} n+3 \\ 2 \end{array}$$

Considerando a igualdade anterior, conclui-se que

$$u_n < 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Assim, a sucessão é limitada pois $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{4} \leq u_n < 2$.

19. Considera as sucessões (u_n) e (v_n) definidas da seguinte forma:

$$u_n = n^2 + 7n - 60 \quad \text{e} \quad v_n = \frac{1}{n+12}$$

19.1 Indica os termos da sucessão (u_n) que verificam a condição $u_n < 0$.

$$u_n < 0 \Leftrightarrow n^2 + 7n - 60 < 0$$

Temos:

$$\begin{aligned} n^2 + 7n - 60 = 0 &\Leftrightarrow n = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 1 \times (-60)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n = \frac{-7 \pm 17}{2} \Leftrightarrow n = -12 \vee n = 5 \end{aligned}$$

Sendo a concavidade da parábola definida por $y = x^2 + 7x - 60$ voltada para cima e $n \in \mathbb{N}$, as soluções de $u_n < 0$ são os número naturais que satisfazem $-12 < n < 5$.

Concluindo, os 1.º, 2.º, 3.º e 4.º termos de (u_n) satisfazem $u_n < 0$.

19.2 Estuda a sucessão $(u_n \times v_n)$ quanto à monotonia.

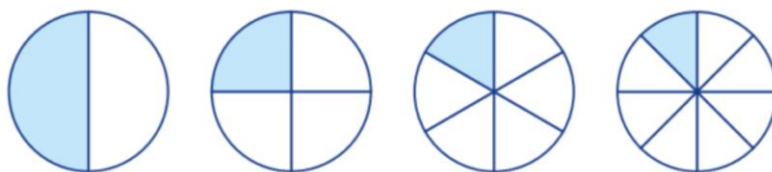
$$\begin{aligned} u_n \times v_n &= (n^2 + 7n - 60) \times \frac{1}{n+12} = \\ &= \frac{n^2 + 7n - 60}{n+12} = \frac{(n+12)(n-5)}{n+12} = n-5 \end{aligned}$$

$$u_{n+1} \times v_{n+1} - u_n \times v_n = n+1-5 - (n-5) = 1$$

A sucessão $(u_n \times v_n)$ é crescente pois

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \times v_{n+1} - u_n \times v_n > 0.$$

20. Considera uma sequência de figuras, obtida por decomposições sucessivas de um círculo, da qual se representam as quatro primeiras.



- 20.1 Seja (a_n) a sucessão do número de setores circulares em que fica dividido cada um dos círculos.

20.1.1 Escreve os seis primeiros termos da sucessão.

$$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 6, a_4 = 8, a_5 = 10 \text{ e } a_6 = 12.$$

20.1.2 Indica o termo geral da sucessão (a_n) .

$$a_n = 2n$$

20.1.3 Prova que a sucessão (a_n) é crescente.

$$a_{n+1} - a_n = 2(n+1) - 2n = 2$$

Temos que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n > 0$, ou seja,
 $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} > a_n$, o que prova que (a_n) é crescente.

- 20.2 Relativamente aos círculos representados em cada figura, sabe-se que:

- a área de cada círculo é igual a 1 ;
- cada círculo está decomposto em regiões com a mesma área.

Seja (u_n) a sucessão das áreas coloridas na sucessão anterior.

20.2.1 Escreve os seis primeiros termos da sucessão (u_n) .

$$u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{1}{4}, u_3 = \frac{1}{6}, u_4 = \frac{1}{8}, u_5 = \frac{1}{10} \text{ e } u_6 = \frac{1}{12}.$$

20.2.2 Indica o termo geral das sucessão (u_n) .

$$u_n = \frac{1}{2n}$$

20.2.3 Determina o termo de ordem 10 da sucessão (u_n) .

$$u_{10} = \frac{1}{2 \times 10} = \frac{1}{20}$$

20.2.4 Poderá o termo $\frac{1}{13}$ ser um termo desta sucessão? Justifica.

O número $\frac{1}{13}$ não pode ser um termo desta sucessão porque os termos da sucessão têm denominadores pares.

20.2.5 A sucessão (u_n) é monótona? Justifica.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n} = \\ &= \frac{2n - (2n+2)}{2n(2n+2)} = \frac{-2}{2n(2n+2)} = -\frac{1}{n(2n+2)} \end{aligned}$$

Temos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$, ou seja,
 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$, o que prova que (u_n) é decrescente.