GEOMETRIA ANALÍTICA – PRODUTO ESCALAR 4

1. Na figura está representado um paralelogramo, em que $\overline{AD} = 3$ e $\overline{AB} = 5$.

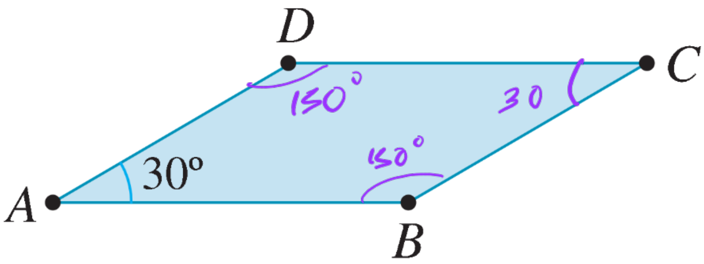
Determina:

1.1. $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$

1.2. $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$

1.3. $\overrightarrow{DC} \times (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB})$

1.4. $\overrightarrow{CB} \times (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD})$



1.1 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AB}\| \, \|\overrightarrow{AD}\| \cos(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) = 3 \times 5 \times \cos 30^\circ$

$= \frac{15\sqrt{3}}{2}$

1.2 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{AB}\| \, \|\overrightarrow{BC}\| \cos(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}) = 5 \times 3 \times \cos(150^\circ)$

$= -\frac{15\sqrt{3}}{2}$

1.3 $\overrightarrow{DC} \times (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{DC} \times 2\overrightarrow{AB} = 2\, \overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{AB} =$

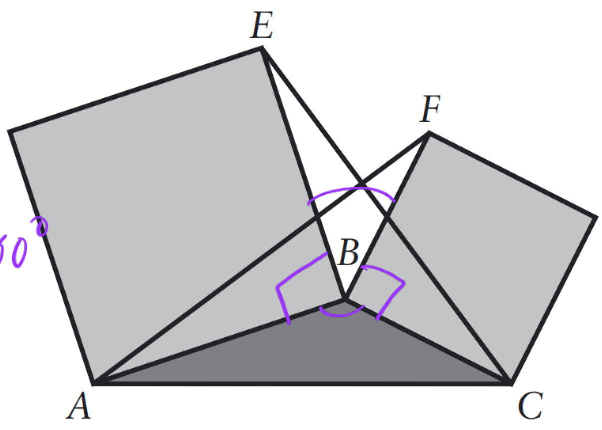
$= 2 \, \|\overrightarrow{DC}\| \, \|\overrightarrow{AB}\| \cos(\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{AB}) = 2 \times 5 \times 5 \times \cos 0^\circ =$

$= 50$

1.4 $\overrightarrow{CB} \times (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{CB}\| \, \|\overrightarrow{AD}\| \cos(\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{AD})$

$= 3 \times 3 \times \cos 180^\circ = -9$

2. Considera um triângulo $[ABC]$ e dois quadrados construídos sobre dois dos seus lados, como se ilustra na figura.



$E\hat{B}F + 90^\circ + 90^\circ + A\hat{B}C = 360^\circ$

$E\hat{B}F + A\hat{B}C = 180^\circ$

$A\hat{B}C = 180^\circ - E\hat{B}F$

Prova, recorrendo ao produto escalar de vetores, que $\overrightarrow{EC}$ e $\overrightarrow{AF}$ são perpendiculares.

Sugestão: escreve cada um dos vetores $\overrightarrow{EC}$ e $\overrightarrow{AF}$ como soma de vetores e relaciona as amplitudes dos ângulos ABC e EBF .

Tem-se: $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$

Se $\overrightarrow{EC} \perp \overrightarrow{AF}$ então $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{AF} = 0$

$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{AF} = (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}) =$

$= \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BF} =$

$\overrightarrow{EB} \perp \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BF} = 0$

$= 0 + \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + 0 =$

$\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BF} = -\|\overrightarrow{BE}\|\|\overrightarrow{BF}\| \cos(E\hat{B}F)$

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = -\|\overrightarrow{BC}\|\|\overrightarrow{BA}\| \cos(A\hat{B}C)$

$\cos(A\hat{B}C) = \cos(180^\circ - E\hat{B}F) = -\cos(E\hat{B}F)$

$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \|\overrightarrow{BC}\| \|\overrightarrow{BA}\| \cos(E\hat{B}F)$

Logo, $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} =$

$= -\|\overrightarrow{BE}\| \|\overrightarrow{BF}\| \cos(E\hat{B}F) + \|\overrightarrow{BC}\| \|\overrightarrow{BA}\| \cos(E\hat{B}F)$

$\|\overrightarrow{BE}\| = \|\overrightarrow{BA}\|$ e $\|\overrightarrow{BF}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$

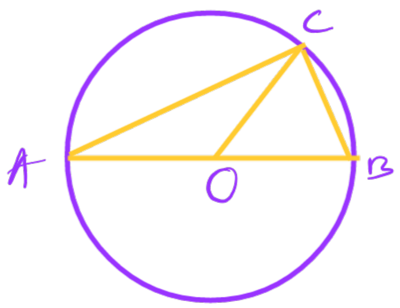
Portanto

$= -\|\overrightarrow{BA}\| \cdot \|\overrightarrow{BC}\| \cos(E\hat{B}F) + \|\overrightarrow{BA}\| \|\overrightarrow{BC}\| \cos(E\hat{B}F)$

$= 0$

Logo $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{AF}$ são perpendiculares

3. Utilizando o produto escalar, prova que um ângulo inscrito numa semicircunferência é reto.



Queremos mostrar que ACB é reto, ou seja mostrar que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB}\right) =$$

$$= \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} =$$

$$\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\underbrace{\|\overrightarrow{OA}\| \, \|\overrightarrow{OB}\|}_{\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OB}\|} \cos(A\hat{O}B)$$

$$= -\|\overrightarrow{OA}\|^2$$

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{CO} = -\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OC} = \|\overrightarrow{OC}\|^2$$

Como $[OA]$ e $[OC]$ são raios da circunferência então

$$-\|\overrightarrow{OA}\|^2 + \|\overrightarrow{OC}\|^2 = 0$$

Logo, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} =$

$$= -\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \cdot \left(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$$

$$= \overrightarrow{OC} \cdot \vec{0} = 0$$