Geometria Analítica – Produto escalar de vetores 2

1. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores tais que $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=4$ e $(\vec{u}\,\hat{}\,\vec{v})=\frac{2\pi}{3}$.

Determina:

a) $(2\vec{u})\cdot\vec{v}$

b) $\vec{u}\cdot(5\vec{v})$

c) $(-2\vec{u})\cdot(5\vec{v})$

d) $\vec{u}\cdot(\vec{u}+4\vec{v})$

2. De um triângulo $[ABC]$ sabe-se que: $\overline{AB}=10$, $\overline{AC}=6$ e $B\hat{A}C=60°$.

a) Determina $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

b) Determina $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

3. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores e seja λ um número real. Mostra que:

a) $\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v})-(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}=0$

b) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=(\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|)(\|\vec{u}\|-\|\vec{v}\|)$

c) $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2(\vec{u}\cdot\vec{v})$

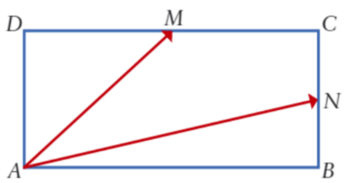
d) $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

4. Na figura está representado o retângulo $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- M é o ponto médio do lado $[DC]$;
- N é o ponto médio do lado $[BC]$;
- $\overline{AC}=8$.

Determina o valor de $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$.



5. Utilizando o produto escalar, prova que as diagonais de um losango são perpendiculares.

Sugestão: tem em conta que um losango é um paralelogramo com os lados todos iguais.

6. Utilizando o produto escalar, prova que um ângulo inscrito numa semicircunferência é reto.

7. Em referencial o.n. xOy, sejam os vetores $\vec{u}(2, 3)$ e $\vec{v}(-1, 4)$. Determina:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $\|\vec{u}\|$ e $\|\vec{v}\|$ c) $\cos(\vec{u} \hat{\ } \vec{v})$

d) $(\vec{u} \hat{\ } \vec{v})$ (em graus, arredondado às unidades)

8. Em referencial o.n. xOy, sejam os pontos $A(2, -1)$, $B(-1, 3)$ e $C(2, 4)$. Determina:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC})$

b) $A\hat{B}C$ (em graus, arredondado às unidades)

9. Em referencial o.n. xOy, sejam os vetores $\vec{u}(2, \sqrt{3})$ e $\vec{v}(x-4, \sqrt{3x})$, onde x designa um número real. Determina x, de tal modo que:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$; b) os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam perpendiculares;

c) os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam colineares; d) $(\vec{u} \hat{\ } \vec{v}) = 60°$.

10. Considera, em referencial o.n. xOy, os pontos $A(9, 1)$ e $B(12, 5)$.

a) O segmento de reta $[AB]$ é um dos lados de um quadrado $[ABCD]$, contido no primeiro quadrante. O segmento de reta $[BC]$ é outro lado desse quadrado. Determina as coordenadas dos pontos C e D.

b) O segmento de reta $[AB]$ é um dos catetos de um triângulo retângulo $[ABE]$ de área 25, contido no primeiro quadrante. O segmento de reta $[BE]$ é a hipotenusa desse triângulo retângulo. Determina as coordenadas do ponto E.

11. Considera, num plano munido de um referencial ortonormado, os pontos $A(-1, 3)$ e $B(5, 11)$.

Determina uma equação do lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ desse plano, tais que:

a) $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$ b) $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

12. Considera, em referencial o.n. xOy, as retas r e s de equações reduzidas $y = 2x + 1$ e $y = -\frac{1}{2}x + 4$, respetivamente. Justifica que as retas r e s são perpendiculares.

13. Considera, em referencial o.n. xOy, a reta r de equação reduzida $y = -\frac{3}{4}x + 2$.

Determina a equação reduzida da reta perpendicular à reta r e que passa no ponto $A(3, 5)$.

14. Em referencial o.n. xOy, considera o ponto $A(4,-1)$ e a circunferên
$x^2+2x+y^2=25$.

a) Mostra que o ponto A pertence à circunferência c .

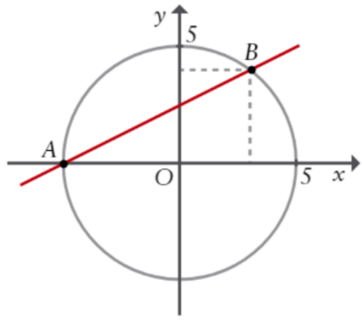
b) Determina a equação reduzida da reta tangente à circunferência nc

15. Na figura ao lado estão representadas, num referencial o.n. xOy, uma reta AB e uma circunferência com centro na origem e raio igual a 5.

Os pontos A e B pertencem à circunferência.

O ponto A também pertence ao eixo das abcissas.

O declive da reta AB é igual a $\frac{1}{2}$.



a) Determina a equação reduzida da reta AB .

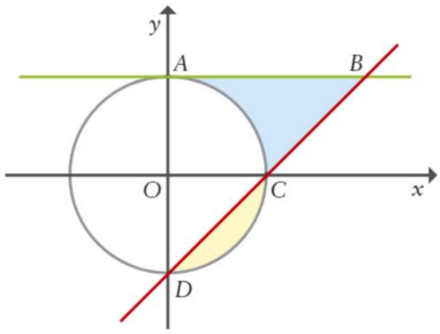
b) Determina as coordenadas do ponto B .

c) Seja C o ponto de coordenadas $(-3,\ 16)$. Verifica que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B .

d) Seja D o ponto do segundo quadrante que é interseção da circunferência com a mediatriz do segmento de reta $[AB]$. Determina a equação reduzida da tangente à circunferência no ponto D .

16. Na figura ao lado estão representados, num referencial o.n. xOy :

- os pontos A e D, pertencentes ao eixo Oy ;
- o ponto C, pertencente ao eixo Ox ;
- a circunferência de centro na origem do referencial e raio 10, que passa nos pontos A , C e D ;
- a reta BD, que passa no ponto C ;
- a reta AB, paralela ao eixo Ox .



Estão assinaladas na figura duas regiões:

- uma, a azul, no primeiro quadrante;
- outra, a amarelo, no quarto quadrante.

a) Determina as coordenadas do ponto B .

b) Determina a equação reduzida da mediatriz do segmento $[BC]$.

c) Define, por meio de uma condição, a região amarela, incluindo a fronteira.

d) Determina a área da região colorida a azul.

e) Seja r a reta tangente à circunferência que é paralela à reta de equação $y=\frac{3}{4}x$ e que tem ordenada na origem positiva. Seja E o ponto de tangência.

Determina as coordenadas do ponto E .

f) Seja α a amplitude do ângulo BOE . Determina $\operatorname{tg}\alpha$.

17. Considera, num referencial o.n. xOy, os pontos $A(1, 20)$, $B(-5, -10)$ e $C(17, 12)$.

a) Determina a amplitude do ângulo ABC. Apresenta o resultado em graus, arredondado às décimas.

b) Determina o valor exato da altura do triângulo $[ABC]$ relativa à base $[BC]$.

c) Determina a área do triângulo $[ABC]$.

d) Determina a equação reduzida da circunferência l, circunscrita ao triângulo.

e) Determina a equação reduzida da reta t, tangente à circunferência l no ponto C.

f) Determina a inclinação da reta t. Apresenta o resultado em graus, arredondado às décimas.

18. Considera, num referencial o.n. xOy, a circunferência c de equação $(x-4)^2+(y+3)^2=25$ e o ponto $A(8, 0)$.

a) Mostra que o ponto A e o ponto O (origem do referencial) pertencem à circunferência c.

b) Sejam r e s as tangentes à circunferência c nos pontos A e O, respetivamente.
Determina as coordenadas do ponto de interseção das retas r e s.

c) Designa-se por ângulo de duas retas concorrentes, não perpendiculares, qualquer dos ângulos agudos que elas determinam.
Determina a amplitude do ângulo formado pelas retas r e s.
Apresenta o resultado em graus, arredondado às unidades.

Soluções

1. a)	-12	**1. b)**	-30	**1. c)**	60	**1. d)**	-15	**2. a)**	30	**2. b)**	130
4.	32	**5.**	0	**6.**	0	**7. a)**	10	**7. b)**	$\sqrt{17}$	**7. c)**	$\frac{10}{\sqrt{221}}$
7. d)	$48°$	**8. a)**	35	**8. b)**	$72°$	**9. a)**	$x = 4$	**9. b)**	$x = \frac{8}{5}$	**9. c)**	$x = -4$
9. d)	$x = 3$	**10. a)**	$C(8,8)\,;\,D(5\,,4)$			**10. b)**	$E(1\,,7)$	**11. a)**	$(x-2)^2 + (y-7)^2 = 25$		
11. b)	$y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$	**13.**	$y = \frac{4}{3}x + 1$	**14. b)**	$y = 5x - 21$	**15. a)**	$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$	**15. b)**	$B(3\,,4)$	**15. d)**	$y = \frac{1}{2}x + \frac{5\sqrt{5}}{2}$
16. a)	$B(20\,,10)$	**16. b)**	$y = -x + 20$	**16. c)**	$y \leq x - 10 \wedge x^2 + y^2 \leq 100$			**16. d)**	$A_{região\ azul} = 150 - 25\pi$		
16. e)	$E(-6\,,8)$	**16. f)**	$\tan \propto = -\frac{11}{2}$	**17. a)**	$33{,}7°$	**17. c)**	$12\sqrt{2}$	**17. d)**	$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 260$		
17. e)	$y = -\frac{7}{4}x + \frac{167}{4}$			**17. f)**	$119{,}7°$	**18. b)**	$I_{Ponto\ de\ interseção}\left(4\,,\frac{16}{3}\right)$			**18. c)**	$74°$