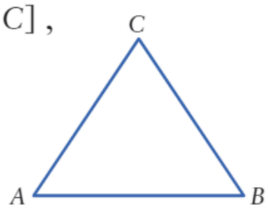
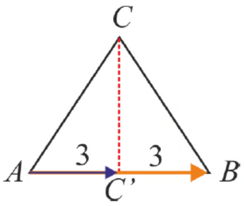
Geometria Analítica – Produto escalar de vetores 1

1. Na figura ao lado está representado um triângulo isósceles $[ABC]$, em que $\overline{AC}=\overline{BC}$.
Sabe-se que $\overline{AB}=6$.
Determina o valor de $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

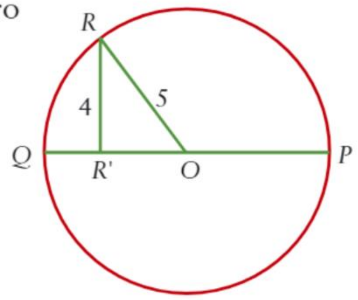


Designemos por C' a projeção ortogonal de C sobre AB. Uma vez que o triângulo $[ABC]$ é isósceles, C' é o ponto médio de $[AB]$. Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC'}$ têm o mesmo sentido.



$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC'}\right\| = 6 \times 3 = 18$$

2. Na figura ao lado está representada uma circunferência de centro no ponto O e raio 5. $[PQ]$ é um diâmetro da circunferência.
O ponto R pertence à circunferência.
O ponto R' é a projeção ortogonal do ponto R na reta PQ.
Sabe-se que $\overline{RR'}=4$.
Determina o valor de $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}$.

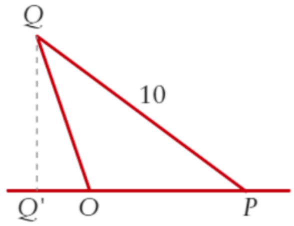


Os vetores $\overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{OR'}$ têm sentidos contrários, logo $\overrightarrow{OP}\,.\,\overrightarrow{OR} = -\left\|\overrightarrow{OP}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OR'}\right\|$.

$$\overline{OR'}^2 = \overline{OR}^2 - \overline{RR'}^2 \Leftrightarrow \overline{OR'}^2 = 25 - 16 \Leftrightarrow \overline{OR'} = 3$$

$$\overrightarrow{OP}\,.\,\overrightarrow{OR} = -5 \times 3 = -15$$

3. Na figura ao lado está representado um triângulo $[OPQ]$.



Sabe-se que:

- $\overline{PQ} = 10$
- $\overline{OP} = 3\,\overline{OQ'}$
- $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = -12$

Determina o perímetro do triângulo $[OPQ]$.

$$\overrightarrow{OP} \,.\, \overrightarrow{OQ} = -12 \Leftrightarrow -\left\|\overrightarrow{OP}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OQ'}\right\| = -12 \Leftrightarrow 3\left\|\overrightarrow{OQ'}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OQ'}\right\| = 12 \Leftrightarrow$$

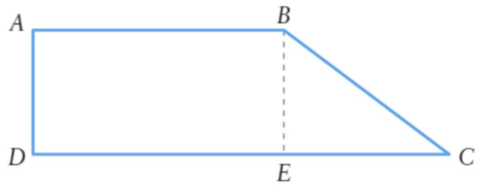
$$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{OQ'}\right\|^2 = 4 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{OQ'}\right\| = 2, \text{ logo } \left\|\overrightarrow{OP}\right\| = 3 \times 2 = 6, \text{ pelo que } \overline{Q'P} = 2 + 6 = 8$$

$$\overline{QQ'}^2 = \overline{PQ}^2 - \overline{Q'P}^2 \Leftrightarrow \overline{QQ'}^2 = 100 - 64 \Leftrightarrow \overline{QQ'}^2 = 36 \Leftrightarrow \overline{QQ'} = 6$$

$$\overline{QQ'}^2 + \overline{Q'O}^2 = \overline{QO}^2 \Leftrightarrow 36 + 4 = \overline{QO}^2 \Leftrightarrow \overline{QO} = \sqrt{40} \Leftrightarrow \overline{QO} = 2\sqrt{10}$$

$$P_{[OPQ]} = \overline{OP} + \overline{PQ} + \overline{QO} = 6 + 10 + 2\sqrt{10} = 16 + 2\sqrt{10}$$

4. Na figura ao lado está representado um trapézio retângulo $[ABCD]$ de área 24. O ponto E é a projeção ortogonal do ponto B na reta CD.



Sabe-se que $\overline{AB} = 6$ e que $\overline{AD} = 3$.

Determina:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

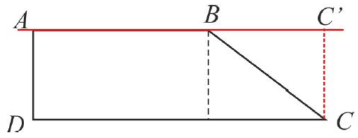
c) $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EC}$

$$A_{[ABCD]} = 24 \Leftrightarrow \frac{\overline{DC} + \overline{AB}}{2} \times \overline{AD} = 24 \Leftrightarrow \frac{\overline{DC} + 6}{2} \times 3 = 24 \Leftrightarrow \overline{DC} = 16 - 6 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \overline{DC} = 10$. Como $\overline{DE} = 6$, vem que $\overline{EC} = 10 - 6 = 4$.

a) $\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AE} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 36$

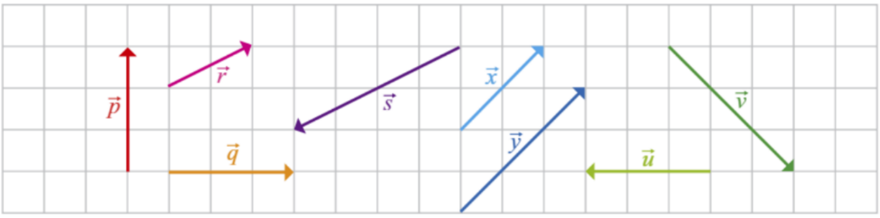
b) Designemos por C' a projeção ortogonal de C sobre AB.



$$\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC'}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{DC}\right\| = 6 \times 10 = 60$$

c) $\overrightarrow{EA} \,.\, \overrightarrow{EC} = -\left\|\overrightarrow{ED}\right\| \times \left\|\overrightarrow{EC}\right\| = -6 \times 4 = -24$

5. Observa a figura (considera como unidade de comprimento o lado de uma quadrícula).



a) Indica, apresentando as amplitudes em radianos:

a₁) $(\vec{p} \,\hat{}\, \vec{q})$ **a₂)** $(\vec{r} \,\hat{}\, \vec{s})$ **a₃)** $(\vec{x} \,\hat{}\, \vec{y})$ **a₄)** $(\vec{u} \,\hat{}\, \vec{v})$

b) Determina o valor de:

b₁) $\vec{p} \cdot \vec{q}$ **b₂)** $\vec{r} \cdot \vec{s}$ **b₃)** $\vec{x} \cdot \vec{y}$ **b₄)** $\vec{u} \cdot \vec{v}$

a₁) $\frac{\pi}{2}$

a₂) π

a₃) 0

a₄) $\frac{3\pi}{4}$

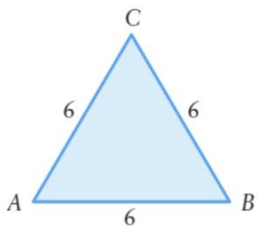
b₁) 0

b₂) $\|\vec{r}\| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}\ ;\ \vec{r}\,.\,\vec{s} = -\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = -10$

b₃) $\|\vec{x}\| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}\ ;\ \|\vec{y}\| = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}\ ;\ \vec{x}\,.\,\vec{y} = 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 12$

b₄) $\vec{u}\,.\,\vec{v} = -3 \times 3 = -9$

6. Seja $[ABC]$ um triângulo equilátero de lado 6.



a) Indica, apresentando as amplitudes em graus:

a₁) $(\overrightarrow{AB} \,\hat{}\, \overrightarrow{AC})$ **a₂)** $(\overrightarrow{AB} \,\hat{}\, \overrightarrow{AB})$ **a₃)** $(\overrightarrow{AB} \,\hat{}\, \overrightarrow{BC})$

b) Determina o valor de:

b₁) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ **b₂)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ **b₃)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$

a₁) $60°$

a₂) $0°$

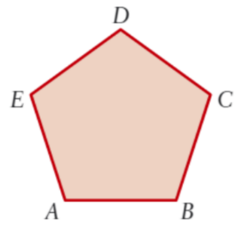
a₃) $180° - 60° = 120°$

b₁) $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB} \,\hat{}\, \overrightarrow{AC}\right) = 6 \times 6 \times \cos 60° = 36 \times \frac{1}{2} = 18$

b₂) $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB} \,\hat{}\, \overrightarrow{AB}\right) = 6 \times 6 \times \cos 0° = 36$

b₃) $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB} \,\hat{}\, \overrightarrow{BC}\right) = 6 \times 6 \times \cos 120° =$
$= 36 \times [-\cos(180° - 120°)] = -36 \times \cos 60° = -36 \times \frac{1}{2} = -18$

7. Seja $[ABCDE]$ um pentágono regular de perímetro 40.



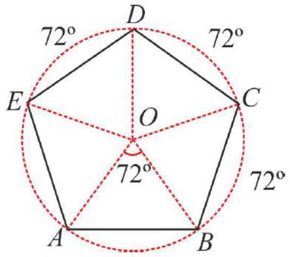
a) Indica, apresentando as amplitudes em graus:

a₁) $\left(\overrightarrow{AB} \hat{\ } \overrightarrow{AE}\right)$ **a₂)** $\left(\overrightarrow{AB} \hat{\ } \overrightarrow{AC}\right)$ **a₃)** $\left(\overrightarrow{AB} \hat{\ } \overrightarrow{AD}\right)$

b) Determina o valor de (apresenta os resultados arredondados às décimas):

b₁) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$ **b₂)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ **b₃)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$

Se o perímetro é 40 o lado do pentágono mede $\frac{40}{5} = 8$. $A\hat{O}B = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$



a₁) $B\hat{A}E = \frac{3 \times 72^\circ}{2} = 108^\circ$

(o ângulo $B\hat{A}E$ é um ângulo inscrito num arco de amplitude $3 \times 72^\circ$)

$\left(\overrightarrow{AB} \widehat{\ \ } \overrightarrow{AE}\right) = 108^\circ$

a₂) $B\hat{A}C = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$

(o ângulo $B\hat{A}C$ é um ângulo inscrito num arco de amplitude 72°)

$\left(\overrightarrow{AB} \widehat{\ \ } \overrightarrow{AC}\right) = 36^\circ$

a₃) $B\hat{A}D = \frac{2 \times 72^\circ}{2} = 72^\circ$

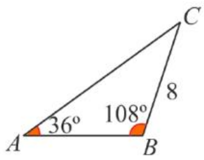
(o ângulo $B\hat{A}D$ é um ângulo inscrito num arco de amplitude $2 \times 72^\circ$)

$\left(\overrightarrow{AB} \widehat{\ \ } \overrightarrow{AD}\right) = 72^\circ$

b₁) $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AE} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AE}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB} \widehat{\ \ } \overrightarrow{AE}\right) = 8 \times 8 \times \cos 108^\circ = -19,8$

b₂) Pela Lei dos senos, temos que $\frac{\operatorname{sen} B\hat{A}C}{\overline{BC}} = \frac{\operatorname{sen} C\hat{B}A}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen} 36^\circ}{8} = \frac{\operatorname{sen} 108^\circ}{\overline{AC}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{8 \operatorname{sen} 108^\circ}{\operatorname{sen} 36^\circ}$

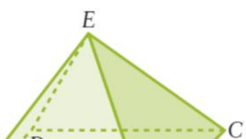


$\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB} \widehat{\ \ } \overrightarrow{AC}\right) = 8 \times \frac{8 \operatorname{sen} 108^\circ}{\operatorname{sen} 36^\circ} \times \cos 36^\circ = 83,8$

b₃) $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AD} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AD}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB} \widehat{\ \ } \overrightarrow{AD}\right) =$

$= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AB} \widehat{\ \ } \overrightarrow{AD}\right) = 8 \times \frac{8 \operatorname{sen} 108^\circ}{\operatorname{sen} 36^\circ} \times \cos 72^\circ = 32$

8. Na figura ao lado está representada uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDE]$, em que a medida do comprimento de todas as arestas é 4.



a₁) $90°$

a₂) $0°$

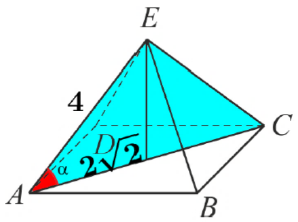
a₃) $180°$

a₄) $45°$

a₅) $60°$ (o triângulo $[ABE]$ é equilátero)

a₆) $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 4^2 + 4^2 \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{32} \Leftrightarrow \overline{AC} = 4\sqrt{2}$.

Designemos por α a amplitude do ângulo CAE. $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



Então, $\alpha = 45°$.

b₁) $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AD} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AD}\right\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AD}}\right) = 4 \times 4 \times \cos 90° = 0$

b₂) $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{DC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{DC}\right\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{DC}}\right) = 4 \times 4 \times \cos 0° = 16$

b₃) $\overrightarrow{AD} . \overrightarrow{CB} = \left\|\overrightarrow{AD}\right\| \times \left\|\overrightarrow{CB}\right\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AD}\ \overrightarrow{CB}}\right) = 4 \times 4 \times \cos 180° = -16$

b₄) $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}}\right) = 4 \times 4\sqrt{2} \times \cos 45° = 16\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 16$

b₅) $\overrightarrow{EA} . \overrightarrow{EB} = \left\|\overrightarrow{EA}\right\| \times \left\|\overrightarrow{EB}\right\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{EA}\ \overrightarrow{EB}}\right) = 4 \times 4 \times \cos 60° = 16 \times \dfrac{1}{2} = 8$

b₆) $\overrightarrow{AC} . \overrightarrow{AE} = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AE}\right\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AE}}\right) = 4\sqrt{2} \times 4 \times \cos 45° = 16\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 16$

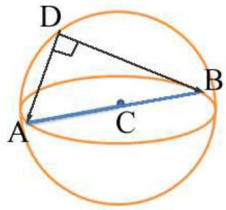
9. Seja $[AB]$ um diâmetro de uma superfície esférica de centro C e raio 5.

a) Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$?

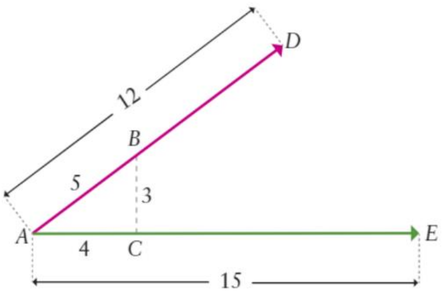
b) Seja D um ponto da superfície esférica distinto de A e de B .

a) Os vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ têm norma 5 e são simétricos, logo,
$\overrightarrow{CA} \, . \, \overrightarrow{CB} = 5 \times 5 \times \cos 180° = -25$.

b) Os vetores $\overrightarrow{DA}$ e $\overrightarrow{DB}$ são perpendiculares logo o seu produto interno é 0.



10. Na figura ao lado estão representados dois vetores, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$, de normas 12 e 15, respetivamente.
No segmento de reta $[AD]$ está assinalado um ponto B.
No segmento de reta $[AE]$ está assinalado um ponto C.
O triângulo $[ABC]$ é retângulo e os seus lados têm 3, 4 e 5 unidades de comprimento.
Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE}$?



$$\overrightarrow{AD} \, . \, \overrightarrow{AE} = \left\|\overrightarrow{AD}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AE}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{AD} \widehat{\ } \overrightarrow{AE}\right) = 12 \times 15 \times \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = 12 \times 15 \times \frac{4}{5} = 144$$

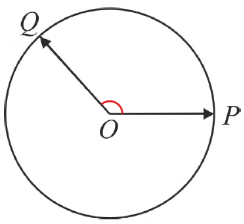
11. Sejam P e Q dois pontos pertencentes a uma circunferência de centro num ponto O.
Sabe-se que:

- $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = -24$
- $\cos\left(\overrightarrow{OP} \,\hat{}\, \overrightarrow{OQ}\right) = -\frac{2}{3}$

Determina o raio da circunferência.

Designemos por r o raio da circunferência. $\overrightarrow{OP} \, . \, \overrightarrow{OQ} = -24 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{OP}\right\| \times \left\|\overrightarrow{OQ}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{OP} \widehat{\ } \overrightarrow{OQ}\right) = -24 \Leftrightarrow r \times r \times -\frac{2}{3} = -24 \Leftrightarrow r^2 = 36 \Leftrightarrow r = 6$$



12. Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não nulos e seja $\alpha = \left(\vec{u} \,\hat{}\, \vec{v}\right)$.

Mostra que $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{\sqrt{\|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$.

$$\frac{\sqrt{\|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}.\vec{v})^2}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{\sqrt{\|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2 \times \cos^2\alpha}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} =$$

$$= \frac{\sqrt{\|\vec{u}\|^2 \times \|\vec{v}\|^2 \ (1 - \cos^2\alpha)}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \ \sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \operatorname{sen}\alpha$$

eduardo.pinhao@matematicaparatodos.pt