Geometria Analítica
Global 1

1) $5y + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 5y = -2x + 4$

$\Leftrightarrow y = -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5}$

$m = -\frac{2}{5}$ é o declive da reta

$\tan \alpha = -\frac{2}{5}$, $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

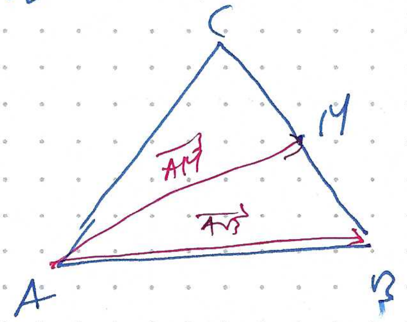
$\alpha = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) \approx 2,8$

r tem uma inclinação de 2,8 rad

$\boxed{C}$

2) $P_{[ABC]} = 6\sqrt{2}$ então cada lado mede

$\frac{6\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$



$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}\right) =$

$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BM} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 - \overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{BM} =$

$= (2\sqrt{2})^2 - \|\overrightarrow{BA}\|\,\|\overrightarrow{BM}\| \cos(\overrightarrow{BA}\,\hat{}\,\overrightarrow{BM}) =$

$= 8 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 60° = 8 - 2 \cdot 2 \times \frac{1}{2} = 6$ $\boxed{B}$

3) $\vec{u}(-3\sqrt{2}, 9)$

(A) $\vec{u}\cdot\vec{a} = (-3\sqrt{2}, 9)(3, \sqrt{2}) = -9\sqrt{2} + 9\sqrt{2} = 0$

$\vec{u} \perp \vec{a}$

(B) $\vec{u}\cdot\vec{b} = (-3\sqrt{2}, 9)\left(1, \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = -3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 0$

$\vec{u} \perp b$

(C) $\vec{u}\cdot\vec{c} = (-3\sqrt{2}, 9)\left(\sqrt{6}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -3\sqrt{12} + \frac{18\sqrt{3}}{3} =$

$= -6\sqrt{2} + 6\sqrt{3} = 0$

$\vec{u} \perp \vec{c}$

(D) $\vec{u}\cdot\vec{d} = (-3\sqrt{2}, 9)(-9, 3\sqrt{2}) = 27\sqrt{2} + 27\sqrt{2} =$

$= 54\sqrt{2}$ logo $\vec{u}$ não é perpendicular a $\vec{d}$

$\boxed{D}$

4) Sejam $\vec{r}$ e $\vec{n}$ um vetor diretor da reta r e um vetor normal ao plano α, respetivamente

$\vec{r}(4, -2, 1)$ e $\vec{n}(2, -1, 2k)$

$\vec{r}\cdot\vec{n} = 0 \Leftrightarrow (4, -2, 1)(2, -1, 2k) = 0$

$\Leftrightarrow 8 + 2 + 2k = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2k = -10$

$\Leftrightarrow k = -5$

$\boxed{A}$

5) Seja C o centro da circunferência, interseção do plano α com a superfície esférica, A o centro da superfície esférica e P um ponto da superfície esférica.

Vamos determinar a distância do ponto C ao ponto A, para que a circunferência tenha raio $\sqrt{3}$

$$\overline{AP}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{CA}^2 \Leftrightarrow 2^2 = (\sqrt{3})^2 + \overline{AC}^2$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = 1 \quad , \overline{AC} > 0$$

Tomando planos paralelos aos planos coordenados distanciados do centro da superfície esférica uma unidade,

temos $x=0$, $x=2$, $y=-1$, $y=1$, $z=1$ ou $z=3$ são possíveis equações do plano α

$\boxed{B}$

$(x-2)^2+(y+1)^2=10$

6.1 $A(1,2)$

$(1-2)^2+(2+1)^2=10$

$\Leftrightarrow \quad 1^2+3^2=10 \quad \Leftrightarrow \quad 10=10$

$B(-1,0)$

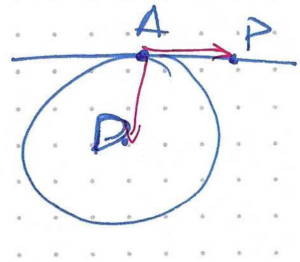
$(-1-2)^2+(0+1)^2=10$

$(-3)^2+1^2=10$

$10=0$

Assim A e B pertencem à circunferência.

6.2 a) Seja $P(x,y)$ um ponto da reta t e $D(2,-1)$ o centro da circunferência



então $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AD}=0$

$\overrightarrow{AP}=P-A=(x,y)-(1,2)$
$=(x-1,y-2)$

$\overrightarrow{AD}=D-A=(2,-1)-(1,2)=(1,-3)$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AD}=(x-1,y-2)(1,-3)=0$

$\Leftrightarrow (x-1-3y+6)=0$

$\Leftrightarrow -3y=-x-5$

$\Leftrightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$ é a equação reduzida da reta t

6.2 b) Seja $P(x,y)$ um ponto da circunferência de diâmetro [AB]

$$\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$$

$$\vec{AP} = P - A = (x,y) - (1,2) = (x-1, y-2)$$

$$\vec{BP} = P - B = (x,y) - (-1,0) = (x+1, y)$$

$$\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0 \Leftrightarrow (x-1, y-2)(x+1, y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1) + y^2 - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 + y^2 - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 - 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = 2$$

$y^2 - 2y =$

$y^2 - 2y + 1 - 1$

$(y-1)^2 - 1$

6.3 $\vec{AC} = C - A = (-3,5) - (1,2) =$

$= (-4, 3)$

Os vetores não nulos, perpendiculares a $\vec{AC}$ são do género $(3k, 4k)$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Como a norma tem de ser 2 temos que $\|(3k, 4k)\| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(3k)^2 + (4k)^2} = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{9k^2 + 16k^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{25k^2} = 2 \Leftrightarrow 5|k| = 2 \Leftrightarrow$

$5|k| = 2 \Leftrightarrow |k| = \frac{2}{5} \Leftrightarrow k = -\frac{2}{5} \vee k = \frac{2}{5}$

Para $k = -\frac{2}{5}$, $\left(-\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right)$

Para $k = \frac{2}{5}$, $\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$

logo $\left(-\frac{6}{5}, -\frac{8}{5}\right)$ e $\left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$ são as coordenadas dos vetores.

6.4 Seja $P(x,y)$ um ponto da reta s. então $\overrightarrow{BP} \perp \overrightarrow{AC}$ ou seja

$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$\overrightarrow{AC} = (-4, 3)$

$\overrightarrow{BP} = P - B = (x, y) - (-1, 0) = (x+1, y)$

$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AC} = (x+1, y)(-4, 3) = -4x - 4 + 3y$

$-4x - 4 + 3y = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3y = 4x + 4$

$\Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$ é a equação reduzida da reta s.

7. $A(2,-1,1)$ $B(1,1,1)$ $C(-2,0,3)$

7.1 $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ são paralelos ao plano ABC

$$\vec{AB} = B - A = (1,1,1)-(2,-1,1) = (-1,2,0)$$

$$\vec{AC} = C - A = (-2,0,3)-(2,-1,1) = (-4,1,2)$$

Seja $\vec{u}(a,b,c)$ um vetor normal ao plano ABC então

$$\begin{cases} \vec{u}\cdot\vec{AB} = 0 \\ \vec{u}\cdot\vec{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a,b,c)(-1,2,0) = 0 \\ (a,b,c)(-4,1,2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a+2b=0 \\ -4a+b+2c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=2b \\ -4(2b)+b+2c=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{---} \\ -8b+b+2c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ -7b+2c=0 \end{cases} \begin{cases} a=2b \\ 2c=7b \end{cases}$$

Assim $\vec{u}\left(2b, b, \frac{7b}{2}\right)$ com $b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ é a família de vetores, não nulos, normais ao plano ABC.

Por exemplo para $b=2$, tem-se $\vec{u}(4,2,7)$ é um vetor normal ao plano ABC

ABC é o plano que passa no ponto $A(2,-1,1)$ e admite $\vec{u}(4,2,7)$ como vetor normal:

$$4(x-2)+2(y+1)+7(z-1)=0$$

$$4x-8+2y+2+7z-7=0$$

$$\Leftrightarrow 4x+2y+7z-13=0$$

É uma equação cartesiana do plano ABC

7.2 $\overrightarrow{AB}(-1,2,0)$ é um vetor diretor da reta AB, passa pelo ponto $A(2,-1,1)$

Logo $AB: \begin{cases} x = 2-k \\ y = -1+2k \\ z = 1 \end{cases}$

7.3 $\vec{v}(1,-3k,2)$ é um vetor diretor de s
$\vec{w}(4,2,7)$ é um vetor normal de ABC

s é paralela a ABC se e só se

$$\vec{v}\cdot\vec{w}=0 \Leftrightarrow (1,-3k,2)(4,2,7)=0$$
$$\Leftrightarrow 4-6k+14=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k=3$$

8.1 $\alpha: 2x - 2y + z - 1 = 0$

$C(3, -1, 2)$

$\vec{u}(2, -2, 1)$ é um vetor normal (perpendicular) a α, logo é um vetor diretor da reta r.

$r: (x, y, z) = (3, -1, 2) + k(2, -2, 1), k \in \mathbb{R}$

8.2 O ponto de tangência é o ponto de interseção de r com α

Todo o ponto de r é da forma

$(3+2k, -1-2k, 2+k), k \in \mathbb{R}$

Substituindo as coordenadas deste ponto na equação do plano α, obtém-se

$2(3+2k) - 2(-1-2k) + 2 + k - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$k = -1$

se $k = -1$, $3 + 2(-1) = 1$

$-1 - 2(-1) = 1$

$2 + (-1) = 1$

Logo r interseta α no ponto

$P(1, 1, 1)$

o raio da superfície esférica é

$$\overline{PC} = \sqrt{(3-1)^2+(-1-1)^2+(2-1)^2} = 3$$

logo a equação é:

$$(x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$$

9. $\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{x}{4}\right) \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)$

$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}+2k\pi \vee x+\frac{\pi}{3} = \pi-\frac{\pi}{2}+\frac{x}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x+\frac{x}{4} = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee x-\frac{x}{4} = \pi-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \frac{5x}{4} = \frac{\pi}{6}+2k\pi \vee \frac{3x}{4} = \frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{15}+\frac{8k\pi}{5} \vee x = \frac{2\pi}{9}+\frac{8k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$