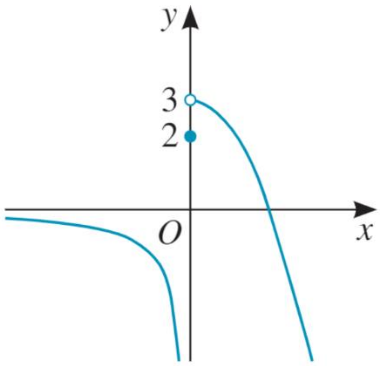
FUNÇÕES – LIMITES

1. Na figura ao lado, está parte da representação gráfica de uma função f de domínio IR, tal que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$.



Considera a sucessão a_n de termo geral:

$$a_n = -\frac{1}{n}$$

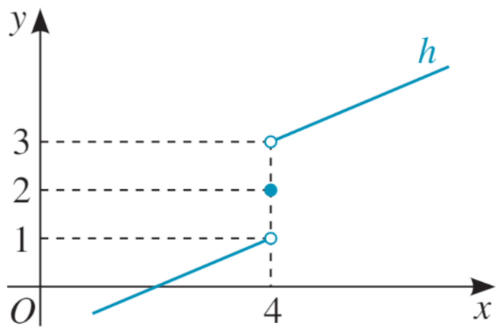
Indica o valor de $\lim f(a_n)$.

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** 2 **(D)** 3

Como a_n tende para valores negativos, tem-se, por observação do gráfico que $\lim f(a_n) = -\infty$

OPÇÃO: A

2. Na figura ao lado, está representada parte do gráfico de uma função h, de domínio IR.



Seja u_n a sucessão de termo geral:

$$u_n = h\left(4 - \frac{1000}{n}\right)$$

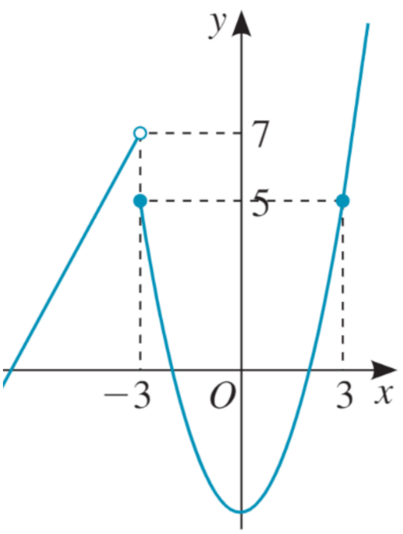
Qual é o valor de $\lim (u_n)$?

(A) $-\infty$ **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3

$\lim u_n = 4^-$

OPÇÃO: B

3. Na figura ao lado, está representada parte do gráfico de uma função h, de domínio IR, cuja restrição a $[-3, +\infty[$ é uma função quadrática.



Seja x_n uma sucessão tal que $\lim h(x_n) = 5$.
Qual das expressões seguintes pode ser o termo geral da sucessão x_n?

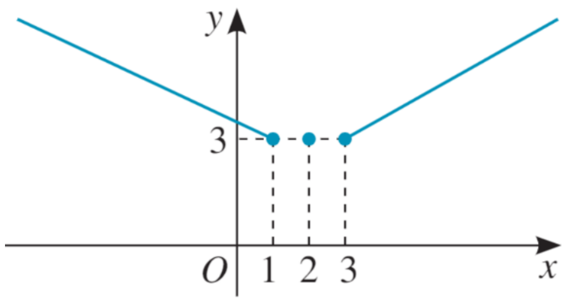
(A) $-3 + 2^{-n}$ **(B)** $5 + \frac{2}{n}$

(C) $\frac{-3n-1}{n}$ **(D)** $5 - 2^{-n}$

Como $\lim h(x_n) = 5$, a sucessão x_n terá de tender para 3 ou para -3 por valores maiores do que -3.
Para as opções A e C, x_n tende para -3, assim para valores maiores do que -3, $x_n = -3 + 2^{-n}$

OPÇÃO: A

4. Na figura ao lado, está representada parte do gráfico de uma função g de domínio, $]-\infty, 1] \cup \{2\} \cup [3, +\infty[$
Sabe-se que $g(1) = g(2) = g(3) = 3$.



Qual das seguintes afirmações é falsa?

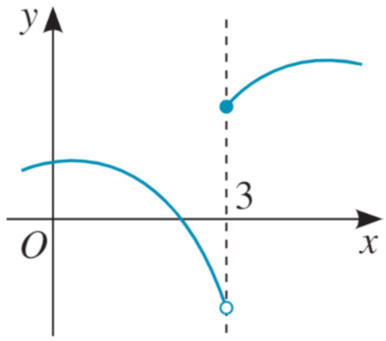
(A) Para qualquer $a \in D_g$, existe $\lim_{x \to -a} g(x)$. **(B)** $\lim_{x \to 2} g(x) = 3$

(C) $\lim_{x \to 1} g(x) = g(2)$ **(D)** Não existe $\lim_{x \to 3} g(x)$

Como a opção A é verdadeira, e $2 \in D_g$ a opção D é falsa.

OPÇÃO: D

5. Na figura ao lado, está representada parte do gráfico de uma f real de variável real.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\lim_{x\to 3} \frac{1}{f(x)} = 0$ **(B)** $\lim_{x\to 3} \frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{2}$

(C) $\lim_{x\to 3} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2}$ **(D)** Não existe $\lim_{x\to 3} \frac{1}{f(x)}$

$\lim_{x\longrightarrow 3^+} f(x) \neq \lim_{x\longrightarrow 3^-} f(x)$, não existe $\lim_{x\longrightarrow 3} f(x)$

OPÇÃO: D

6. Considera a função real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{se } x \neq -2 \\ a & \text{se } x = -2 \end{cases}$$

em que a é um número real.

O valor de a para que exista $\lim_{x\to -2} f(x)$ é:

(A) -4 **(B)** -2 **(C)** 0 **(D)** 2

$\lim_{x\longrightarrow -2} f(x) = \lim_{x\longrightarrow -2} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x\longrightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim_{x\longrightarrow -2} (x-2) = -4$

Logo, para existir $\lim_{x\longrightarrow -2} f(x)$, temos que ter $f(-2) = 4$, como $f(-2) = a \implies a = -4$

OPÇÃO: A

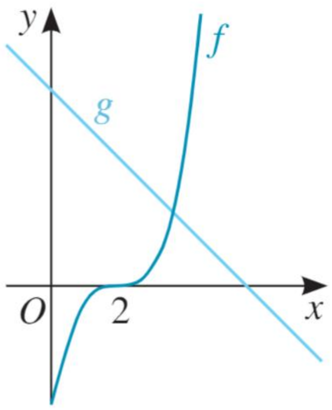
7. O valor de $\lim_{x\to -3^+} \frac{2}{9-x^2}$ é:

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** 2 **(D)** $+\infty$

$\lim_{x\longrightarrow 3^+} \frac{2}{9-x^2} = \frac{2}{0^-} = -\infty$

OPÇÃO: A

8. Na figura ao lado, estão representadas partes dos gráficos de duas funções reais de variável real, f e g .



Tal como a figura sugere, 2 é zero da função f .

Indica o valor de $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{f(x)}{g(x)}$.

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** 2 **(D)** $+\infty$

$\lim\limits_{x\longrightarrow 2^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{k} = 0 \, , k \in IR^+$

OPÇÃO: B

9. Seleciona a opção correta.

(A) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = -1$ **(B)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = 1$

(C) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x} = 0$ **(D)** Não existe $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$

$\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$ e $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$, logo não existe $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \frac{|x|}{x}$

OPÇÃO: D

10. Considera a função racional f definida por:

$$f(x) = \frac{x-1}{2x}$$

Utiliza a definição de limite segundo Heine para provar que:

10.1 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$

Seja x_n uma sucessão qualquer em D_f, tal que $x_n \longrightarrow 1$.

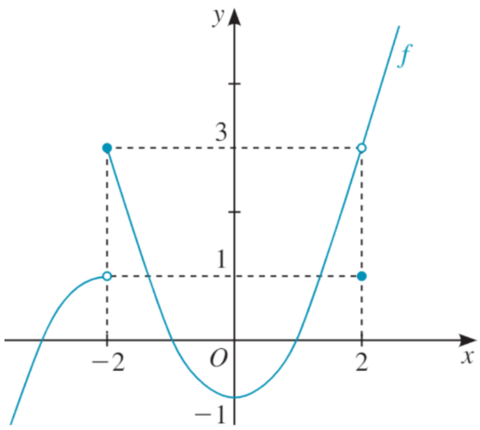
$\lim f(x_n) = \lim \frac{x_n - 1}{2x_n} = \frac{1-1}{2}$

10.2 $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$

Seja x_n uma sucessão qualquer em D_f, tal que $x_n \longrightarrow -\infty$

$\lim f(x_n) = \lim \frac{x_n - 1}{2x_n} = \lim \frac{x_n\left(1 - \frac{1}{x_n}\right)}{2x_n} = \lim \frac{1 - \frac{1}{x_n}}{2} = \frac{1 - \frac{1}{-\infty}}{2} = \frac{1}{2}$

11. Na figura está representada parte do gráfico de uma função f, de domínio IR.



11.1 Justifica que não existe $\lim_{x\to 2} f(x)$

Seja x_n uma sucessão em D_f, tal que $x_n = -2 - \frac{1}{n}$,

Então $x_n \to 2^-$, assim $\lim f(x_n) = 3$

Como $2 \in D_f$ e $f(2) = 1$. logo, não existe $\lim_{x\to 2} f(x)$

11.2 Considera as sucessões a_n e b_n de termos gerais:

$a_n = \frac{2-2n}{n}$ e $b_n = -n^2 + 3n - 5$

De acordo com os dados da figura indica:

a) $\lim f(a_n)$

$\lim a_n = \lim \frac{2-2n}{n} = \lim \frac{-2n}{n} + \frac{2}{n} = -2^+$

Então $\lim f(a_n) = 3$

b) $\lim f(b_n)$

$\lim b_n = \lim(-n^2 + 3n - 5) = \lim n^2 \left(-1 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}\right) = (+\infty)^2(-1 + 0 - 0) = -\infty$

11.3 Dá um exemplo de uma sucessão x_n tal que:

a) $\lim f(x_n) = 3$

Por exemplo $x_n = 2 - \frac{1}{n}$

b) $x_n \to -2 \wedge \lim f(x_n) = 1$

Por exemplo $x_n = -2 - \frac{1}{n}$

c) $x_n \to 2 \wedge \lim f(x_n) = 1$

Por exemplo $x_n = 2$

12. Considera a função g , de domínio IR , definida analiticamente por:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{6}{x+4} & \text{se } x<-4\\ 5-3x & \text{se } -4\leq x\leq 1\\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} & \text{se } x>1\end{cases}$$

12.1 Averigua se existe $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ e $\lim\limits_{x\to -4} g(x)$.

$\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

$$\lim_{x\to 1^+} g(x)=\underbrace{\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}}_{\left(\frac{0}{0}\right)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x}+1=2$$

$$\lim_{x\to 1^-} g(x)=\lim_{x\to 1^-}(5-3x)=5-3=2$$

Logo existe $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

$\lim\limits_{x\to -4} g(x)$

$$\lim_{x\to -4^-} g(x)=\lim_{x\to -4^-}\frac{6}{x+4}=\frac{6}{-4^-+4}=\frac{6}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -4^+} g(x)=\lim_{x\to -4^+}(5-3x)=5-3(-4)=17$$

Logo não existe $\lim\limits_{x\to -4} g(x)$

12.2 Determina $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

$$\lim_{x\to +\infty} g(x)=\underbrace{\lim_{x\to +\infty}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}}_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x}+1=+\infty$$

12.3 Justifica que $\lim\limits_{x\to -\infty}[g(x)\times(2\cos x)]=0$

$$\lim_{x\to -\infty} g(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{6}{x+4}=\frac{6}{-\infty}=0$$

Como $2\cos x$ é uma função limitada.

$$\lim_{x\to -\infty}[g(x)\times(2\cos x)]=0\times k=0\,,\ k\in IR$$

13. Seja h a função real de variável real de domínio IR, definida por

$$h(x)=\begin{cases} ax^2+x & \text{se } x\leq 1 \\ \dfrac{x^3-1}{x^2-1} & \text{se } 1<x<2 \\ 1-bx & \text{se } x\geq 2 \end{cases}$$

em que a e b designam números reais.

Determina:

13.1 O valor de a de modo que exista $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$

$\lim\limits_{x\to 1} h(x)$

$\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (ax^2+x) = a+1$

$h(1)=a+1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^3-1}{x^2-1}$

	1	0	0	-1
1		1	1	1
	1	1	1	0

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{(x^2+x+1)}{(x+1)} = \frac{3}{2}$

Para existir limite em $x=1$

$a+1=\frac{3}{2} \Leftrightarrow a=\frac{3}{2}-1 \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$

13.2 O valor de b de modo que exista $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$

$\lim\limits_{x\to 2} h(x)$

$\lim\limits_{x\to 2^-} h(x) \underbrace{=}_{\text{por } 13.1} \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{7}{3}$

$\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} 1-bx = 1-2b = h(2)$

Para que exista limite, $1-2b=\frac{7}{3} \Leftrightarrow -2b=\frac{4}{3} \Leftrightarrow b=-\frac{2}{3}$

14. Determina:

14.1 $\lim_{x\to+\infty}(x^2+5x-20) = +\infty + \infty - 20 = +\infty$

14.2 $\lim_{x\to-\infty}(x^3-2x) \underbrace{=}_{(\infty-\infty)} \lim_{x\longrightarrow-\infty} x^3\left(1-\frac{2}{x^2}\right) = -\infty(1-0) = -\infty$

14.3 $\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-5}{5x^2-2} \underbrace{=}_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{4x^2}{5x^2} = \frac{4}{5}$

14.4 $\lim_{x\to4}\frac{x-4}{x^2-7x+12} \underbrace{=}_{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x\longrightarrow4}\frac{x-4}{(x-4)(x-3)} = \lim_{x\longrightarrow4}\frac{1}{x-3} = 1$

C.A.

$x^2-7x+12=0 \Leftrightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{7^2-48}}{2} \Leftrightarrow x=3 \vee x=4$

14.5 $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+2}}{5x-1} \underbrace{=}_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{|x|\sqrt{2-\frac{2}{x}}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x\sqrt{2-\frac{2}{x}}}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{\sqrt{2-0}}{1-0} = \sqrt{2}$

14.6 $\lim_{x\to a^-}\frac{x^3+2x-a^3-2a}{(x-a)^2}$, $a \in IR$

$\operatorname{Lim}_{x\to a^-}\frac{x^3+2x-a^3-2a}{(x-a)^2} \underbrace{=}_{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim_{x\to a^-}\frac{(x+2)(x^2-a)}{(x-a)(x-a)} = \lim_{x\to a^-}\frac{(x+2)(x-a)(x+a)}{(x-a)(x-a)} = \frac{(a+2)2a}{a^- - a} = \frac{(a+2)2a}{0^-} = -\infty$

C.A.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & -a & -2a \\
-2 & & -2 & 0 & 2a \\
\hline
 & 1 & 0 & -a & \boxed{0}
\end{array}$$

$x^3+2x-a^3-2a=(x+2)(x^2-a)$

14.7 $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{5}{2x}\times(x^2+1)\right] \underbrace{=}_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{5x^2}{2x} = -\infty$

14.8 $\lim_{x\to-\infty}\frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}} \underbrace{=}_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{x+2}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -\frac{1+0}{\sqrt{1+0}} = -1$

14.9 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2-2x}{x-\sqrt{x}} \underbrace{=}_{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x\longrightarrow0}\frac{x(x-2)}{x\left(x-\sqrt{\frac{1}{x}}\right)} = \frac{0-2}{0-\sqrt{\frac{1}{0}}} = \frac{-2}{-\infty} = 0$

14.10 $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{3}{x^2-2x} = \frac{3}{4^--4^-} = \frac{3}{0^-} = -\infty$

14.11 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^4-2x+4}{x^2+x} \underbrace{=}_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x^4}{x^2} = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}x^2 = +\infty$

14.12 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|x^2-4|}{2x+1} \underbrace{=}_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x^2-4}{2x+1} = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x^2}{2x} = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x}{2} = +\infty$

14.13 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6x^2+3}{2x^4} \underbrace{=}_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\frac{6x^2+3}{2x^4} = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\frac{6}{2x^2} = \frac{6}{+\infty} = 0$

14.14 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{x} \underbrace{=}_{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x\longrightarrow0}\frac{(\sqrt{5+x}-\sqrt{5})(\sqrt{5+x}+\sqrt{5})}{x(\sqrt{5+x}+\sqrt{5})} = \lim\limits_{x\longrightarrow0}\frac{5+x-5}{x(\sqrt{5+x}+\sqrt{5})} = \lim\limits_{x\longrightarrow0}\frac{1}{\sqrt{5+x}+\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$

14.15 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{\frac{5}{x+1}} \underbrace{=}_{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\frac{2x+2}{5x} = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x\left(2+\frac{2}{x}\right)}{5x} = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\frac{2+\frac{2}{x}}{5} = \frac{2+0}{5} = \frac{2}{5}$

14.16 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-1}\right) \underbrace{=}_{(\infty-\infty)} \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\frac{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-1}} = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\frac{2x+1-x+1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-1}} =$

$= \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-1}} = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{|x|\left(\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)} = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)} = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}} =$

$= \frac{1}{0^+} = +\infty$

14.17 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x-1}}{x^2-1} \underbrace{=}_{\left(\frac{0}{0}\right)} \lim\limits_{x\longrightarrow1^+}\frac{\sqrt{x-1}\times\sqrt{x-1}}{(x^2-1)\sqrt{x-1}} = \lim\limits_{x\longrightarrow1^+}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)\sqrt{x-1}} = \lim\limits_{x\longrightarrow1^+}\frac{1}{(x+1)\sqrt{x-1}} = \frac{1}{0^+}$

C.A.

$\sqrt{1^- - 1} = \sqrt{0^-}$ Impossível

$\sqrt{1^+ - 1} = \sqrt{0^+}$

14.18 $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{|2x-1|}{\sqrt{2x^2-5x+2}}$

C.A.

$2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{|2x-1|}{\sqrt{2x^2-5x+2}} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{-2x+1}{\sqrt{(x-2)(2x-1)}} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{(-2x+1)\sqrt{(x-2)(2x-1)}}{(x-2)(2x-1)} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{-(2x-1)\sqrt{(x-2)(2x-1)}}{(x-2)(2x-1)} =$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} -\frac{\sqrt{(x-2)(2x-1)}}{x-2} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} -\frac{0}{-\frac{3}{2}} = 0$$

C.A.

$2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} \Leftrightarrow x = 2 \vee x = \frac{1}{2}$

De $\sqrt{(x-2)(2x-1)}$ vem que $(x-2)(2x-1) \geq 0$

	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-2)(2x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \leq \frac{1}{2} \;\vee\; x \geq 2.$

Logo $x_n \to \frac{1}{2}^-$