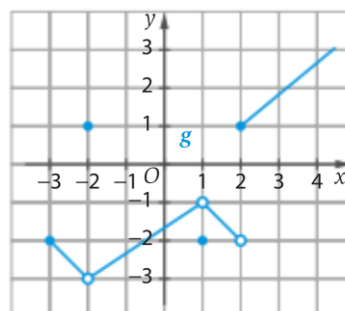
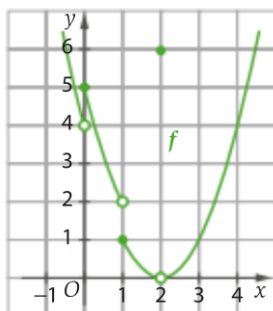


FUNÇÕES – LIMITES. HEINE.

1. Nas figuras seguintes, estão representadas graficamente a função  $f$  de domínio  $\mathbb{R}$  e a função  $g$  de domínio  $[-3, +\infty[$ .



Recorrendo à definição de limite, determina, caso existam, os seguintes limites:

1.1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Para qualquer sucessão  $(x_n)$  de elementos em  $D_f$ , tal que  $x_n \rightarrow -\infty$ , tem-se  $\lim f(x_n) = +\infty$ .

Logo,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

1.6.  $\lim_{x \rightarrow -3} g(x)$

Para qualquer sucessão  $(x_n)$  de elementos em  $D_g$ , tal que  $x_n \rightarrow -3$ , tem-se  $\lim g(x_n) = -2$ .

Logo,  $\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = -2$ .

1.2.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Considerando as sucessões definidas por  $u_n = \frac{1}{n}$  e  $v_n = -\frac{1}{n}$ , ambas convergentes para 0, tem-se  $\lim f(u_n) = 5$  e  $\lim f(v_n) = 4$ ; logo,  $\lim f(u_n) \neq \lim f(v_n)$ .

Concluimos que não existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

1.7.  $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$

Considerando as sucessões definidas por  $u_n = -2 + \frac{1}{n}$  e  $v_n = -2$ , ambas convergentes para  $-2$ , tem-se  $\lim g(u_n) = -3$  e  $\lim g(v_n) = 1$ ; logo,  $\lim g(u_n) \neq \lim g(v_n)$ . Concluimos que não existe  $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$ .

1.3.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Considerando as sucessões definidas por  $u_n = 1 + \frac{1}{n}$  e  $v_n = 1 - \frac{1}{n}$ , ambas convergentes para 1, tem-se  $\lim f(u_n) = 1$  e  $\lim f(v_n) = 2$ ; logo,  $\lim f(u_n) \neq \lim f(v_n)$ .

Concluimos que não existe  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

1.8.  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

Considerando as sucessões definidas por  $u_n = 1 + \frac{1}{n}$  e  $v_n = 1$ , ambas convergentes para 1, tem-se  $\lim g(u_n) = -1$  e  $\lim g(v_n) = -2$ ; logo,  $\lim g(u_n) \neq \lim g(v_n)$ . Concluimos que não existe  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ .

**1.4.**  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Considerando as sucessões definidas por  $u_n = 2 + \frac{1}{n}$  e  $v_n = 2$ , ambas convergentes para 2, tem-se  $\lim f(u_n) = 0$  e  $\lim f(v_n) = 6$ ; logo,  $\lim f(u_n) \neq \lim f(v_n)$ . Concluímos que não existe  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

**1.9.**  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

Considerando as sucessões definidas por  $u_n = 2 + \frac{1}{n}$  e  $v_n = 2 - \frac{1}{n}$ , ambas convergentes para 2, tem-se  $\lim g(u_n) = 1$  e  $\lim g(v_n) = -2$ ; logo,  $\lim g(u_n) \neq \lim g(v_n)$ . Concluímos que não existe  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ .

**1.5.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Para qualquer sucessão  $(x_n)$  de elementos em  $D_f$ , tal que  $x_n \rightarrow +\infty$ , tem-se  $\lim f(x_n) = +\infty$ . Logo,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

**1.10.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

Para qualquer sucessão  $(x_n)$  de elementos em  $D_g$ , tal que  $x_n \rightarrow +\infty$ , tem-se  $\lim g(x_n) = +\infty$ . Logo,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .

**2.** Seja  $f$  a função real de variável real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} (x + 1)^2 & \text{se } x < 1 \\ -x + 5 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

**2.1.** Determina  $\lim f(x_n)$ , considerando as sucessões  $x_n$  definidas por:

**a)**  $x_n = 1 + \frac{1}{n}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n > 1$$

$$f(x_n) = -\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 5 = 4 - \frac{1}{n}$$

$$\lim\left(4 - \frac{1}{n}\right) = 4$$

**b)**  $x_n = 1 - \frac{1}{n}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n < 1$$

$$f(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n} + 1\right)^2 = \left(2 - \frac{1}{n}\right)^2 = 4 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}$$

$$\lim\left(4 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = 4$$

**2.2.** Com base nos cálculos da alínea anterior, o que podes concluir quanto à existência de  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$$

**2.3.** Recorrendo à definição de limite, determina os seguintes limites:

**a)**  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Para qualquer sucessão  $(x_n)$  de elementos em  $D_f$ , tal que  $x_n \rightarrow 0$ , tem-se, a partir de determinada ordem,  $\lim f(x_n) = \lim (x_n + 1)^2 = (0 + 1)^2 = 1$ .

Logo,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .

**b)**  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

Para qualquer sucessão  $(x_n)$  de elementos em  $D_f$ , tal que  $x_n \rightarrow 3$ , tem-se, a partir de determinada ordem,  $\lim f(x_n) = \lim (-x_n + 5) = -3 + 5 = 2$ .

Logo,  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$ .

3. Seja  $g$  a função real de variável real definida por:

$$g(x) = \begin{cases} |x - 3| - 2 & \text{se } x < 4 \\ x - 3 & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$$

3.1. Determina  $\lim g(x_n)$ , considerando as sucessões  $x_n$  definidas por:

a)  $x_n = 4 + \frac{1}{n^2}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 4 + \frac{1}{n^2} > 4$$

$$\lim g(x_n) = \lim \left( 4 + \frac{1}{n^2} - 3 \right) = \lim \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) = 1$$

b)  $x_n = 4 - \frac{1}{n^2}$

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = 4 - \frac{1}{n^2} < 4$$

$$\begin{aligned} \lim g(x_n) &= \lim \left( \left| 4 - \frac{1}{n^2} - 3 \right| - 2 \right) = \\ &= \lim \left( \left| 1 - \frac{1}{n^2} \right| - 2 \right) \underset{1 - \frac{1}{n^2} \geq 0}{=} \lim \left( 1 - \frac{1}{n^2} - 2 \right) = -1 \end{aligned}$$

3.2. Com base nos cálculos da alínea anterior, o que podes concluir quanto à existência de  $\lim_{x \rightarrow 4} g(x)$ ?

Não existe  $\lim_{x \rightarrow 4} g(x)$

3.3. Recorrendo à definição de limite, determina os seguintes limites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

Para qualquer sucessão  $(x_n)$  de elementos em  $D_g$ , tal que  $x_n \rightarrow 1$ , tem-se, a partir de determinada ordem:

$$\begin{aligned} \lim g(x_n) &= \lim \left( |x_n - 3| - 2 \right) \underset{x_n - 3 < 0}{=} \lim (3 - x_n - 2) = \\ &= \lim (1 - x_n) = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Logo,  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 7} g(x)$

Para qualquer sucessão  $(x_n)$  de elementos em  $D_g$ , tal que  $x_n \rightarrow 7$ , tem-se, a partir de determinada ordem:

$$\lim g(x_n) = \lim (x_n - 3) = 7 - 3 = 4$$

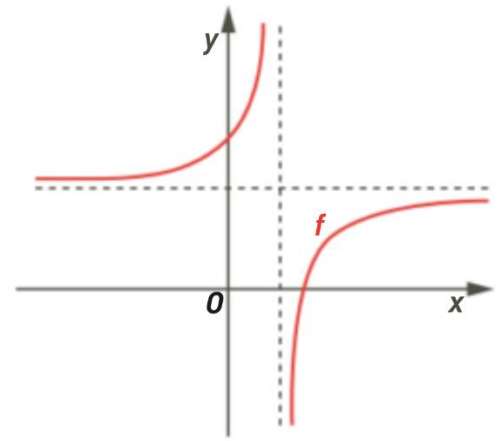
Logo,  $\lim_{x \rightarrow 7} g(x) = 4$ .

4. No referencial  $Oxy$  está representada a função  $f$  definida por  $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$ .

Considera as seguintes sucessões definidas por:

$$u_n = n^2 + n ; v_n = 1 + \frac{1}{2n} ; w_n = \frac{1-n^3}{n^2} \text{ e } s_n = \frac{2n-5}{2n}$$

Determina:



4.1.  $\lim f(u_n)$

$$\lim u_n = \lim n^2 + n = +\infty$$

$$\lim f(u_n) = \lim \frac{2u_n-3}{u_n-1} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{u_n\left(2-\frac{3}{u_n}\right)}{u_n\left(1-\frac{1}{u_n}\right)} = 2$$

4.2.  $\lim f(v_n)$

$$v_n = 1 + \frac{1}{2n} > 1$$

$$\lim v_n = \lim \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = 1$$

$$\lim f(v_n) = \lim \frac{2v_n-3}{v_n-1} = \frac{2-3}{1-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

4.3.  $\lim f(w_n)$

$$\lim w_n = \lim \frac{1-n^3}{n^2} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{n^3\left(\frac{1}{n^3}-1\right)}{n^2} = \lim n\left(\frac{1}{n^3}-1\right) = -\infty$$

$$\lim f(u_n) = \lim \frac{2w_n-3}{w_n-1} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{w_n\left(2-\frac{3}{w_n}\right)}{w_n\left(1-\frac{1}{w_n}\right)} = 2$$

4.4.  $\lim f(s_n)$

$$s_n = \frac{2n-5}{2n} = 1 - \frac{5}{2n} < 1$$

$$\lim s = \lim \left(1 - \frac{5}{2n}\right) = 1$$

$$\lim f(s_n) = \lim \frac{2s_n-3}{s_n-1} = \frac{2-3}{1-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

5. Seja  $f$  a função real de variável real definida por  $\frac{2-3x}{x+2}$  e a sucessão  $x_n$  definida por  $x_n = 1 + \frac{2}{n}$ .

5.1. Calcula  $\lim x_n$ .

$$\lim \left( 1 + \frac{2}{n} \right) = 1 + \frac{2}{\infty} = 1 + 0 = 1$$

5.2. Mostra que  $\lim f(x_n) = -\frac{1}{3}$ .

$$\lim \frac{2-3x_n}{x_n+2} = \frac{2-3\lim(x_n)}{\lim(x_n)+2} = \frac{2-3 \times 1}{1+2} = -\frac{1}{3}$$

5.3. Recorrendo à definição de limite, mostra que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{3}$

Consideremos a sucessão  $x_n = 1 + \frac{2}{n}$ ,  $x_n \in D_f$ , como  $x_n \rightarrow 1$ , tem-se que  $\lim f(x_n) = -\frac{1}{3}$

$$\text{Logo } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{3}$$

6. Mostra, aplicando a definição de limite, que:

6.1.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+3}{x-1} = 5$

Para qualquer sucessão  $x_n$ , de elementos em  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  tal que  $x_n \rightarrow 2$  tem-se:

$$\lim \frac{x_n+3}{x_n-1} = \frac{2+3}{2-1} = 5$$

6.2.  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$  sendo  $g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{4x-1}{2-x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

Considerando as sucessões  $u_n = 1 - \frac{1}{n}$  e  $v_n = 1 + \frac{1}{n}$ , ambas convergentes para 1, com  $u_n < 1$  e  $v_n > 1$ .

$$\lim g(u_n) = 2 \times 1 + 1 = 3 \text{ e } \lim g(v_n) = \frac{4 \times 1 - 1}{2 \times 1 - 1} = 3$$

$$\text{Logo } \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$$

6.3.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$

Para qualquer sucessão  $x_n$ , de elementos em  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$  tal que  $x_n \rightarrow 2$  tem-se:

$$\lim \frac{1}{(x_n-2)^2} = \frac{1}{(2-2)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

7. Para cada uma das funções reais de variável real a seguir definidas, determina, recorrendo à definição de limite, o limite no ponto indicado.

7.1.  $f(x) = 2x - 1$  ;  $x = 0$

Para qualquer sucessão  $x_n$ , de elementos em  $D_f$  tal que  $x_n \rightarrow 0$  tem-se:

$$\lim f(x_n) = 2x_n - 1 = 2 \times 0 - 1 = -1$$

7.2.  $h(x) = \sqrt[3]{x-2}$  ;  $x = 3$

Para qualquer sucessão  $x_n$ , de elementos em  $D_h$  tal que  $x_n \rightarrow 3$  tem-se:

$$\lim h(x_n) = \sqrt[3]{x_n - 2} = \sqrt[3]{3 - 2} = 1$$

7.3. 
$$j(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \geq 1 \\ \sqrt{x+3} - 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Seja  $j|_{[1, +\infty[} = \frac{1}{x}$  e seja  $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ , de elementos em  $D_{j|_{[1, +\infty[}}$ , tem-se  $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$

Então  $u_n \rightarrow 1$ , assim  $\lim j(u_n) = \lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{1} = 1$

Seja  $j|_{] -\infty, 1[} = \sqrt{x+3} - 1$  e seja  $v_n = 1 - \frac{1}{n}$ , de elementos em  $D_{j|_{] -\infty, 1[}}$ , tem-se  $\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$

Então  $v_n \rightarrow 1$ , assim  $\lim j(v_n) = \lim \sqrt{v_n + 3} - 1 = \sqrt{1 + 3} - 1 = 2 - 1 = 1$

Logo,  $\lim_{x \rightarrow 1} j(x) = 1$

7.4.  $g(x) = |x - 5|$  ;  $x = 2$

Para qualquer sucessão  $x_n$ , de elementos em  $D_g$  tal que  $x_n \rightarrow 2$  tem-se:

$$\lim g(x_n) = \lim |x_n - 5| = \lim (x_n - 5) = 2 - 5 = -3$$

7.5.  $i(x) = \sqrt{2x-1} - \sqrt{3x-2}$  ;  $x = 1$

Para qualquer sucessão  $x_n$ , de elementos em  $D_i$  tal que  $x_n \rightarrow 1$  tem-se:

$$\lim i(x_n) = \lim (\sqrt{2x_n - 1} - \sqrt{3x_n - 2}) = \sqrt{2 - 1} - \sqrt{3 - 2} = 1 - 1 = 0$$

7.6.  $k(x) = \frac{x-3}{x}$  ;  $x = 4$

Para qualquer sucessão  $x_n$ , de elementos em  $D_k$  tal que  $x_n \rightarrow 4$  tem-se:

$$\lim k(x_n) = \lim \frac{x_n-3}{x_n} = \frac{4-3}{4} = 0$$

8. Considera a função  $f$  definida em  $\mathbb{R}$  por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ x - x^2 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Usando a definição de limite de uma função num ponto, mostra que:

8.1.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

Para qualquer sucessão  $x_n$ , de elementos em  $D_f$  tal que  $x_n \rightarrow 1$  tem-se:

$$\lim f(x_n) = \lim(x_n - x_n^2) = 0$$

Logo  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

8.2. Não existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Considerando as sucessões  $u_n = \frac{1}{n}$  e  $v_n = 0$  ambas convergentes para 0

$$\lim u_n = \lim v_n = 0$$

$$\lim f(u_n) = 0 - 0 = 0 \text{ e } \lim g(v_n) = 1$$

Logo não existe  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

9. Considera a função  $f$  definida em  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  por:

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x}$$

Mostra, usando a definição, que:

9.1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Para qualquer sucessão  $x_n$ , de elementos em  $D_f$  tal que  $x_n \rightarrow -\infty$  tem-se:

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{(x_n)^2}{1-x_n} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim \frac{x_n}{\frac{1}{x_n}-1} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$$

9.2.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$

Para qualquer sucessão  $x_n$ , de elementos em  $D_f$  tal que  $x_n \rightarrow 1^+$  tem-se:

$$\lim f(x_n) = \lim \frac{(x_n)^2}{1-x_n} = \frac{1}{1-1^+} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$