Funções Reais de Variável Real – Limites Heine. Limites.

1. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ definida por $f(x) = 1 + \frac{1}{x+1}$. Recorrendo à definição de limite segundo Heine, prova que:

a) $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{3}{2}$ **b)** $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ **c)** $\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$

2. Na figura está representada parte do gráfico da função f . Determina:

a) $\lim f(a_n)$, sendo $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$

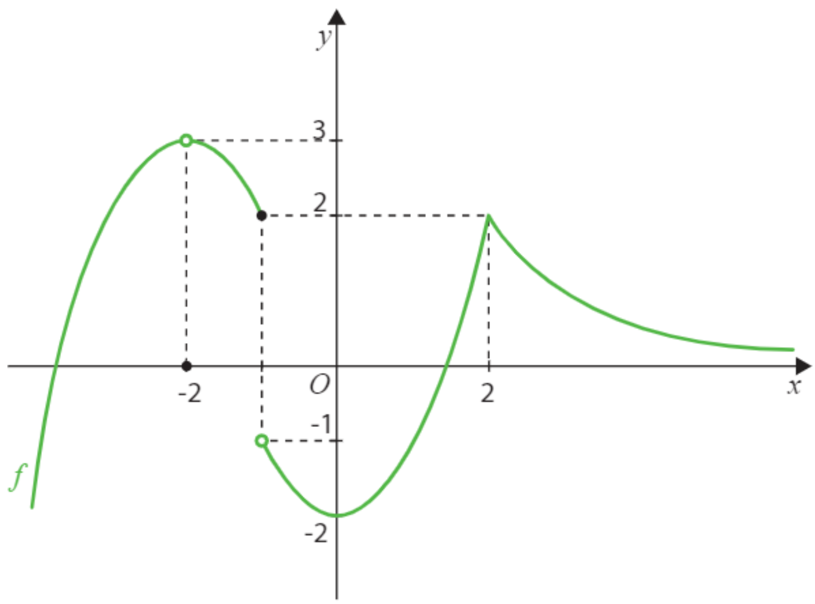
b) $\lim f(b_n)$, sendo $b_n = \frac{-n+1}{n+2}$

c) $\lim f(c_n)$, sendo $c_n = \frac{-n-2}{n+1}$

d) $\lim f(d_n)$, sendo $d_n = \frac{-2n+1}{n+2}$

e) $\lim f(u_n)$, sendo $u_n = \frac{-n^2+1}{n+2}$

f) $\lim f(v_n)$, sendo $v_n = \frac{n^2+1}{n+2}$



3. Seja f a função representada graficamente na figura. Determina os seguintes limites.

a) $\lim_{x\to-2} f(x)$

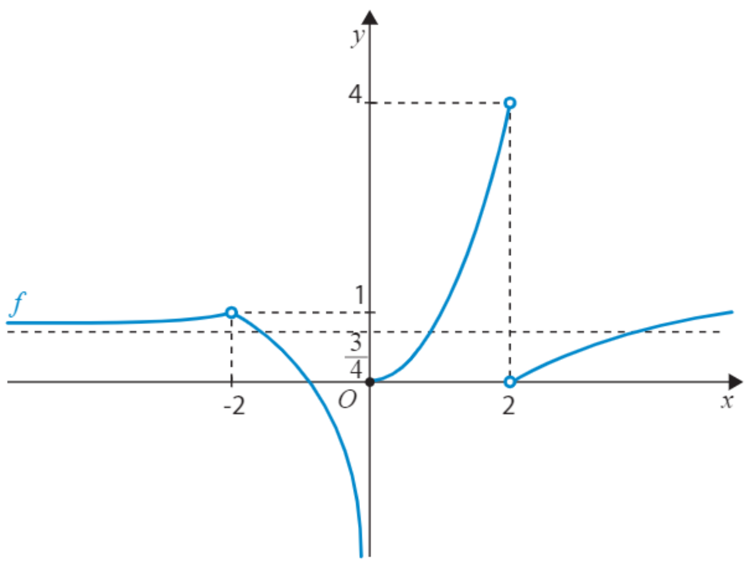
b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

c) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$

d) $\lim_{x\to 2^+} [f(x)]^2$

e) $\lim_{x\to 2^-} \sqrt{f(x)}$

f) $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$



4. Calcula os seguintes limites, começando por identificar, caso exista, o tipo de indeterminação:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + x^2 + 2)$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2+2x+1}{x+1}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2+3x}{2(x-1)(x+1)}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x^2-4x+3}$

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2-1}{x} - x\right)$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{\frac{x+2}{2}}}{3x+1}$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2+2x}{x+1} \times \frac{1}{3x}\right)$

h) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{|x-2|}{x^2-4}$

i) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2-4}{|x-2|}$

j) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}$

k) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x}$

l) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}}$

5. Calcula os seguintes limites, começando por identificar, caso exista, o tipo de indeterminação:

a) $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 2x + 1)$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2+2x+1}{x+1}$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x^2+2x+1}{x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3+2x^2+x}{x}$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-1}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^4-1}$

g) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x-2}}$

h) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x}$

i) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

j) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}-x}{x^3-x^2}$

k) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2+x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}}$

l) $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2-1}}$

6. Para cada valor de k, a expressão seguinte define uma função de domínio $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x-2} + k & \text{se } x < 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \\ \dfrac{2x+1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Determina o valor de k, para o qual existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

Soluções

1.

2.

a)	2	**b)**	-1	**c)**	2
d)	3	**e)**	$-\infty$	**f)**	0

3.

a)	1	**b)**	0	**c)**	$-\infty$
d)	0	**e)**	2	**f)**	0

4.

a)	$-\infty$	**b)**	$+\infty$	**c)**	$\frac{1}{2}$	**d)**	0
e)	0	**f)**	$\frac{3}{2}$	**g)**	$\frac{1}{3}$	**h)**	0
i)	$+\infty$	**j)**	0	**k)**	$-\frac{1}{2}$	**l)**	$\frac{1}{2}$

5.

a)	4	**b)**	0	**c)**	$+\infty$	**d)**	1
e)	3	**f)**	$\frac{3}{4}$	**g)**	0	**h)**	$+\infty$
i)	1	**j)**	$-\infty$	**k)**	2	**l)**	0

6. $k = 3$