FUNÇÕES – INVERSA E RACIONAIS

1. Considere a função g , contínua em IR, definida por:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{kx^3-k^4}{x^2-k^2} & \text{se} \quad x\geq k\\ x^2+x & \text{se} \quad x<k\end{cases} \text{, com } k\in IR\setminus\{0\}$$

1.1. Mostre que $k=2$

Como g é contínua em IR , então também é contínua em $x=k$, isto é, $\lim\limits_{x\to k^-} g(x)=\lim\limits_{x\to k^+} g(x)=g(k)$

Então:

$$\lim_{x\to k^-} g(x)=\lim_{x\to k^-}\left(x^2+x\right)=k^2+k=g(k)$$

$$\lim_{x\to k^+} g(x)=\lim_{x\to k^+}\frac{kx^3-k^4}{x^2-k^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to k^+}\frac{k\left(x^3-k^3\right)}{x^2-k^2}=$$

$$\underset{\text{C.A.1}}{=}\lim_{x\to k^+}\frac{k\cancel{(x-k)}\left(x^2+kx+k^2\right)}{\cancel{(x-k)}(x+k)}=$$

$$=\lim_{x\to k^+}\frac{k\left(x^2+kx+k^2\right)}{x+k}=\frac{k\left(k^2+k\times k+k^2\right)}{k+k}=$$

$$=\frac{\cancel{k}\left(3k^2\right)}{2\cancel{k}}=\frac{3k^2}{2}$$

CA1

	1	0	0	$-k^3$
k		k	k^2	k^3
	1	k	k^2	$\boxed{0}$

$$x^3-k^3=(x-k)\left(x^2+kx+k^2\right)$$

Como $\lim\limits_{x\to k^-} g(x)=\lim\limits_{x\to k^+} g(x)=g(k)$, temos que:

$$k^2+k=\frac{3k^2}{2}\Leftrightarrow 2k^2+2k-3k^2=0\Leftrightarrow -k^2+2k=0\Leftrightarrow k^2-2k=0\Leftrightarrow k(k-2)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k=0\vee k=2$$

Como $k\in IR\setminus\{0\}$ concluímos que $x=2$ c.q.m.

1.2. Determine $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{3x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^3-16}{x^2+x}}{3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3-16}{3x^3+3x^2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cancel{x^3}}{3\cancel{x^3}}=\frac{2}{3}$$

1.3. Determine $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{g(x)}+x\right)$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)}{\sqrt{x^2+x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x}-x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$=\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}}-x}}_{|x|=\begin{cases}x & \text{se } x\geq 0\\ -x & \text{se } x<0\end{cases}\ \text{como } x\to-\infty \text{ então } |x|=-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{-\infty}}+1}=-\frac{1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

2. Considere a função f definida por $f(x)=\dfrac{2-\sqrt{x}}{4-x}$

2.1. Determine o domínio de f

$D_f=\{x\in IR: x\geq 0\wedge 4-x\neq 0\}=IR_0^+\setminus\{4\}$

2.2. Calcule $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

$$\lim_{x\to4}f(x)=\lim_{x\to4}\frac{2-\sqrt{x}}{4-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to4}\frac{\left(2-\sqrt{x}\right)\left(2+\sqrt{x}\right)}{(4-x)\left(2+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to4}\frac{\cancel{4-x}}{\cancel{(4-x)}\left(2+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to4}\frac{1}{2+\sqrt{x}}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

2.3. Determine o valor de k para o qual a função h é contínua, sendo h definida por:

$$h(x)=\begin{cases}f(x) & \text{se } x>4\\ x-6k & \text{se } x\leq 4\end{cases}$$

Temos que h é continua para $x>4$, pois é o quociente de, uma potência de expoente racional e uma função afim, que são contínuam em IR. h também é contínua para $x<4$, pois é uma função afim.

Assim, para h ser contínua tem que ser em $x=4$, isto é, $\lim\limits_{x\to4^-}h(x)=\lim\limits_{x\to4^+}h(x)=h(4)$

$$\lim_{x\to4^-}h(x)=\lim_{x\to4^-}(x-6k)=4-6k=h(4)$$

$$\lim_{x\to4^+}h(x)=\lim_{x\to4^+}f(x)\underset{2.2}{=}\frac{1}{4}$$

Logo, $4-6k=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow 16-24k=1\Leftrightarrow -24k=-15\Leftrightarrow k=\dfrac{15}{24}\Leftrightarrow k=\dfrac{5}{8}$

3. Considere a função g de domínio $[a,+\infty[$, com $a \in IR$, definida por:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2+x}}{x^2+2x-3} & \text{se} \quad x \neq 1 \\ 1 & \text{se} \quad x=1\end{cases}$$

3.1. Determine o menor valor possível que a pode tomar.

$D_g=\{x \in IR: 2+x \geq 0 \wedge x^2+2x-3 \neq 0 \wedge x \neq 1\}$

C.A.

$2+x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$

$x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \Leftrightarrow x=-3 \vee x=1$

Logo, $D_g=[-2,+\infty[$

Portanto, $a=-2$

3.2. Verifique se afunção g é contínua em $x = 1$

A função g é contína em $x=1$ se $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)=g(1)=1$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2+x}}{x^2+2x-3} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{3.1}{=}} \lim_{x \to 1^-} \frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2+x}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2+x}\right)}{(x-1)(x+3)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2+x}\right)}=\lim_{x \to 1^-} \frac{3-2-x}{(x-1)(x+3)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x \to 1^-} \frac{1-x}{(x-1)(x+3)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2+x}\right)}=\lim_{x \to 1^-} \frac{-\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+3)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x \to 1^-} \frac{-1}{(x+3)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2+x}\right)}=\frac{-1}{(1+3)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2+1}\right)}=\frac{-1}{4\left(2\sqrt{3}\right)}=-\frac{1}{8\sqrt{3}}$$

De forma análoga se conclui que $\lim\limits_{x \to 1^+} g(x)=-\dfrac{1}{8\sqrt{3}}$

Como $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x \to 1^+} g(x) \neq g(1)$ a função não é contínua em $x=1$

4. Considere as funções f e g definidas por:

$$f(x)=\frac{2x-1}{2} \quad \text{e} \quad g(x)=\frac{1}{x^2}$$

$D_f = IR$

$D_g=\{x\in IR: x^2\neq 0\}=IR\setminus\{0\}$

4.1. Justifique que f é bijetiva

$$f(x)=\frac{2x-1}{2}=x-\frac{1}{2}$$

Injetividade:

f é injetiva se $\forall x_1,x_2\in D_f,\ f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow x_1-\cancel{\frac{1}{2}}=x_2-\cancel{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Sobrejetiva:

f é sobrejetiva se $\forall y\in IR, \exists x\in IR: y=f(x)$

$$f(x)=y\Leftrightarrow x-\frac{1}{2}=y\Leftrightarrow x=y+\frac{1}{2}$$

$D'_f=IR$ que é igual ao conjunto de chegada, logo f é sobrejetiva

Como f é injetiva e sobrejetiva, concluímos que f é bijetiva.

4.2. Caracterize a inversa da função f

De **4.1.** temos que $x=y+\frac{1}{2}$, logo $f^{-1}(x)=x+\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} f^{-1}: IR &\longrightarrow IR \\ x &\longmapsto x+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

4.3. Justifique que g não admite inversa

g não admite inversa porque, por exemplo, $g(-1)=\frac{1}{(-1)^2}=1$ e $g(1)=\frac{1}{1^2}=1$

Como, $g(-1)=g(1)$, e $-1\neq 1$, logo g não é injetiva. Portanto não admite inversa.

5. Caracterize a inversa da função:

$$\begin{aligned} f : IR_0^+ &\longrightarrow IR_0^+ \\ x &\longrightarrow \sqrt{x} \end{aligned}$$

Começemos por verificar se a função é bijetiva.

Injetividade:

$\forall x_1, x_2 \in IR_0^+,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x_1}\right)^2 = \left(\sqrt{x_2}\right)^2 \underset{\substack{\text{como} \\ D_f = IR_0^+ \\ \left(\sqrt{x}\right)^2 = x}}{\Leftrightarrow} x_1 = x_2$$

Sobrejetividade:

f é sobrejetiva se $\forall y \in IR, \exists x \in IR : y = f(x)$

$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2$, porque $y > 0$

$D'_f = IR_0^+$ que é igual ao conjunto de chegada

Portanto f é sobrejetiva.

Assim, f é bijetiva.

Como, $x = y^2$

$f^{-1}(x) =^2$

$$\begin{aligned} f^{-1} : IR_0^+ &\longrightarrow IR_0^+ \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

6. Sabe-se que f e g são funções reais de variável real bijetivas tais que $f(1) = -2$ e $g^{-1}(-4) = -5$

Resolva as equações

6.1. $3 + f^{-1}(x-1) = 4$

$3 + f^{-1}(x-1) = 4 \Leftrightarrow f^{-1}(x-1) = 1 \Leftrightarrow x - 1 = f(1) \Leftrightarrow x - 1 = -2 \Leftrightarrow x = -1$

6.2. $g(1-2x) = -4$

$g(1-2x) = -4 \Leftrightarrow 1 - 2x = g^{-1}(-4) \Leftrightarrow 1 - 2x = -5 \Leftrightarrow -2x = -6 \Leftrightarrow x = 3$

7. Considere as funções f e g definidas por $f(x)=\sqrt{2x+1}$ e $g(x)=\sqrt{x}+1$

7.1. Determine o domínio da função $h=f-g$ e os zeros de h

$$D_f=\{x\in IR:2x+1\geq 0\}=\left\{x\in IR:x\geq -\frac{1}{2}\right\}=\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$$

$$D_g=\{x\in IR:x\geq 0\}=[0,+\infty[$$

Como $D_h=D_{f-g}=D_f\cap D_g$ então $D_{f-g}=\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[\cap[0+\infty[=[0+\infty[$

Zeros:

$$h(x)=0\wedge x\in D_h\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(f-g)(x)=0\wedge x\in D_h\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0\wedge x\in D_h\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{2x+1}-\sqrt{x}-1=0\wedge x\in D_h\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\sqrt{2x+1}=\sqrt{x}+1\wedge x\in D_h\Leftrightarrow$$
$$\Rightarrow 2x+1=\left(\sqrt{x}+1\right)^2\wedge x\in D_h\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x+1=x+2\sqrt{x}+1\wedge x\in D_h\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=2\sqrt{x}\wedge x\in D_h\Leftrightarrow$$
$$\Rightarrow x^2=4x\wedge x\in D_h\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x=0\wedge x\in D_h\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(x-4)=0\wedge x\in D_h\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x=0\vee x=4)\wedge x\in D_h$$
$$\Leftrightarrow x=0\vee x=4$$

Zeros: $\{0,4\}$

7.2. Determine o domínio de $j=\frac{f}{g}$

$$D_j=D_f\cap\{x\in D_g:g(x)\neq 0\}$$

$$g(x)\neq 0\Leftrightarrow\sqrt{x}+1\neq 0\Leftrightarrow\sqrt{x}\neq -1$$

Como o domínio de $\sqrt{x}$ é IR_0^+ então a condição $\sqrt{x}\neq -1$ é universal em IR_0^+

De **7.1.** temos que $D_f\cap D_g=[0,+\infty[$ então $D_j=[0,+\infty[$

.

7.3. Verifique a existência de assíntotas ao gráfico de j

Como o domínio da função é o intervalo $[0,+\infty[$ e a função j é contínua em todo o seu domínio, é a divisão de duas funções de expoente racional, logo não existem assintotas verticais.

Vamos verificar a existência de assíntotas não verticais.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x}+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x+1}}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{\sqrt{\frac{2}{+\infty}+\frac{1}{+\infty}}}{\sqrt{+\infty}+1}=\frac{0}{+\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x+1}\left(\sqrt{x}-1\right)}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+x}-\sqrt{2x+1}}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-x-1}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{x-1}=+\infty+\frac{1}{2}=+\infty$$

Logo, não existem assíntotas não verticais do gráfico de j

8. Determine o domínio da função definida por $f(x)=\sqrt{|x^2-1|-1}$

$D_f=\left\{x\in IR: |x^2-1|-1\geq 0\right\}$

$|x^2-1|-1\geq 0 \Leftrightarrow |x^2-1|\geq 1 \Leftrightarrow x^2-1\geq 1 \vee x^2-1\leq -1 \Leftrightarrow x^2-2\geq 0 \vee x^2\leq 0$

C.A.

$x^2-2=0 \Leftrightarrow x=-\sqrt{2} \vee x=\sqrt{2}$

Quadro de sinais:

	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	$+\infty$
x^2-2	$+$	0	$-$	0	$+$

Assim, $\left(\left]-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2},+\infty\right[\right)\cup\{0\}=\left]-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup\{0\}\cup\left[\sqrt{2},+\infty\right[$