## Funções Reais de Variável Real – Funções Racionais 3

**1.** Determina o domínio, os zeros e estuda o sinal de cada uma das funções analíticas:

**a)** $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x+1}$

**b)** $h(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2+5x+6}$

**c)** $i(x) = \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{5}{x^2-4}$

**d)** $k(x) = \frac{x^3-1}{x+1} + \frac{1}{x} - \frac{x^3+1}{x-1}$

**2.** Resolve as seguintes equações:

**a)** $x + 3 = \frac{3}{x-1}$

**b)** $\frac{x-2}{2} + \frac{x+1}{2-x} = \frac{1}{4}$

**c)** $\frac{3}{x} - \frac{2}{x-2} = -1$

**d)** $\frac{2}{x^2+2x} - \frac{1}{x} = \frac{x}{x+2}$

**e)** $\frac{x}{x+5} - \frac{x}{x-2} = \frac{3}{x^2+3x-10}$

**f)** $\frac{3}{x-1} - \frac{10}{x^2+3x-4} = \frac{x}{x+4}$

**g)** $\frac{x^2+3x}{x+1} = 3$

**h)** $\frac{3-5x}{x^2-9} = \frac{x-1}{3-x}$

**i)** $\frac{x}{x-2} = \frac{4}{6x-x^2-8}$

**j)** $x = \frac{3x-2}{x^2}$

**3.** Resolve as seguintes inequações:

**a)** $\frac{2}{x^2-4} \leq 0$

**b)** $\frac{x-1}{-2x+1} \geq 0$

**c)** $\frac{x^2+4x+3}{x^2-5x+6} \leq 0$

**d)** $\frac{x+1}{2x+1} < \frac{1}{x} + 2$

**e)** $\frac{3}{x} - \frac{2}{x-2} \leq -1$

**f)** $1 - \frac{1}{x+1} \geq \frac{4}{x^2+x}$

**g)** $\frac{1}{x-2} \geq 3$

**h)** $\frac{2x}{3-x} < 1$

**i)** $\frac{x}{x-2} - \frac{2}{x^2-4} \geq \frac{1}{x+2}$

**j)** $\frac{1}{3x-x^2} \leq \frac{2x}{(x-3)^2}$

**4.** Considera a família de funções $f$ definidas por $f(x) = \frac{x^2-9}{x+k}$ com $k \in \mathbb{R}$ .

Determina os valores de $k$ para os quais a função $f$ :

**a)** tem apenas um zero;

**b)** tem dois zeros;

**c)** não tem zeros.

eduardo.pinhao@matematicaparatodos.pt

## Soluções

**1.**

**a)** $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ ; $f$ não tem zeros ; $f(x) > 0 <=> x \in ]-1,+\infty[$ e $f < 0 <=> x \in ]-\infty,-1[$

**b)** $D_h = \mathbb{R}\backslash\{-3,-2\}$ ; $x = 1$ ; $h(x) > 0 <=> x \in ]-\infty,-3[ \cup ]-2,1[ \cup ]1,+\infty[$ e $h(x) < 0 <=> x \in ]-3,-2[$

**c)** $D_i = \mathbb{R}\backslash\{-2,2\}$ ; $x = 3$ ; $i(x) > 0 <=> x \in ]-2,2[ \cup ]2,3[$ e $i(x) < 0 <=> x \in ]-\infty,-2[ \cup ]3,+\infty[$

**d)** $D_k = \mathbb{R}\backslash\{-1,0,1\}$ ; $k$ não tem zeros ; $f(x) > 0 <=> x \in ]-\infty,-1[ \cup ]0,1[$ e $f < 0 <=> x \in ]-1,0[ \cup ]1,+\infty[$

**2.**

**a)** C.S. $= \{-1-\sqrt{7}, -1+\sqrt{7}\}$ **b)** C.S. $= \left\{\frac{1}{2}, 6\right\}$ **c)** C.S. $= \{-2, 3\}$

**d)** C.S. $= \{-1\}$ **e)** C.S. $= \left\{-\frac{3}{7}\right\}$ **f)** C.S. $= \{2-\sqrt{6}, 2+\sqrt{6}\}$

**g)** $C.S. = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ **h)** $C.S. = \{0\}$ **i)** $C.S. = \emptyset$

**j)** $C.S. = \{-2, 1\}$

**3.**

**a)** $x \in [-\infty,-2[ \cup ]2,+\infty[$ **b)** $x \in \left]-\frac{1}{2},1\right]$ **c)** $x \in [-3,-1] \cup ]2,3[$

**d)** $x \in \left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[ \cup ]0,+\infty[$ **e)** $x \in [-2,0[ \cup ]2,3]$ **f)** $x \in ]-\infty,-2[ \cup [-1,0] \cup ]2,+\infty[$

**g)** $x \in \left]2,\frac{7}{3}\right]$ **h)** $x \in ]-\infty,1[ \cup ]3,+\infty[$ **i)** $x \in ]-\infty,-2[ \cup [-1,0] \cup ]2,+\infty[$

**j)** $x \in \left[-\frac{3}{2},0\right[ \cup [1,3[ \cup ]3,+\infty[$

**4.**

**a)** $k = 3 \vee k = -3$ **b)** $\mathbb{R}\backslash\{-3,3\}$ **c)** Não existe nenhum valor de $k$ para o qual a função $f$ não tenha zeros.