



Funções Reais de Variável Real – Derivadas. Estudo de Funções.

1. Considera a função f , de domínio $[-2, 3]$, definida por $f(x) = 6 - x^2$.
 - 1.1. Esboça o gráfico da função f .
 - 1.2. Indica um intervalo em que a taxa média de variação seja:
 - a) positiva.
 - b) negativa.
 - c) nula.
 - d) igual a 2.
 - e) igual a -1 .
2. Seja a um número real diferente de zero e considere f a função real de variável real, definida por $f(x) = ax^2 + 3x - 2$. Determina a de modo que a taxa média de variação de f no intervalo $[0, 3]$ seja -3 .
3. Considera a função real de variável real f , definida por $f(x) = x^2 - 4$. Determina:
 - a) a equação reduzida da reta, r , tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 5.
 - b) a equação da reta, p , perpendicular à reta r no ponto de tangência.
 - c) as coordenadas do outro ponto de interseção da reta p com o gráfico de f .
4. Num tanque de armazenamento de água é aberta uma torneira no fundo. O volume de água, V , em m^3 , no tanque, t minutos após a abertura da torneira é dado por
$$V = 6 \times 10^5 - 10^2 \times t^2,$$
com $0 \leq t \leq 15$.

Determina:

 - a) a taxa média de variação de V entre os instantes $t = 0$ e $t = 4$.
 - b) a taxa de variação instantânea do volume de água no tanque no instante $t = 5$.
 - c) a taxa de variação instantânea do volume de água no tanque no instante $t = 15$.
5. Um ponto P move-se numa reta de tal forma que, em cada instante, t , em segundos, a sua distância, d , em centímetros, à origem, O , é dada por $d(t) = t^3 - 6t^2$.

Determina:

 - a) a velocidade média do ponto P no intervalo $[1, 4]$.
 - b) a velocidade instantânea do ponto P em $t = 4$.
 - c) a velocidade instantânea do ponto P em $t = 6$.
6. Utiliza a definição de derivada num ponto para determinar a expressão da função derivada das funções seguintes, indicando o respetivo domínio:
 - a) $f(x) = 3$
 - b) $f(x) = 4x - 5$
 - c) $f(x) = 1 - 2x^2$
 - d) $f(x) = \sqrt{x + 1}$
 - e) $f(x) = \frac{3}{2 - x}$

7. Considera a função f , definida por $f(x) = 3x^2 - 2x$.

7.1. Mostra que $f'(x) = 6x - 2$.

7.2. Calcula $f'(1)$ e conclua que f não é decrescente em $[1, 6]$.

8. Caracteriza a função derivada das funções reais de variável real definidas por:

a) $f(x) = 5x - 3$

h) $m(x) = \frac{x}{3} \times \sqrt{9x}$

b) $g(x) = 4x^2 - 2(3x - 2)$

i) $n(x) = \frac{\sqrt{x+4}}{2x+1}$

c) $h(x) = (2x)^4 - (\sqrt{2x})^2 - 3$

j) $p(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$

d) $i(x) = (2x^2 - 1)(3 - 2x)$

k) $q(x) = \left(\frac{x-1}{1-2x}\right)^3$

e) $j(x) = (3x^2 + 1) \times \frac{4}{x}$

l) $r(x) = x^{\frac{1}{3}} - (2x)^{\frac{2}{3}}$

f) $k(x) = \frac{x+2}{3-2}$

g) $l(x) = \sqrt{4x-2}$

9. Seja $f(x) = x^2 + bx + c$. Determina os valores de b e c , sabendo que a reta de equação $y = 2x$ é tangente ao gráfico de f no ponto de coordenadas $(2, 4)$.

10. Considera as funções, f e g , reais de variável real, definidas por:

$$f(x) = 4x^2 \text{ e } g(x) = 1 + \sqrt{x+1}$$

Caracteriza:

a) $(f+g)'$

b) $(fg)'$

c) $(f \circ g)'$

d) $(g \circ f)'$

11. Determina as coordenadas do ponto do gráfico da função f , definida por $f(x) = x^2 - 7x + 10$, tal que a reta tangente ao gráfico nesse ponto:

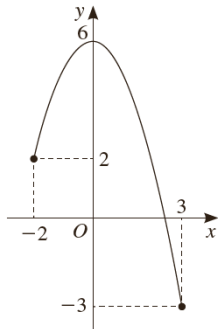
a) tem inclinação igual a $\frac{\pi}{4}$

b) é paralela à reta de equação $y = -2x + 3$.

- 12.** Seja f uma função definida por $f(x) = x^3 - 4x$ no intervalo $[-2, 2]$.
- 12.1.** Justifica que f é contínua em $[-2, 2]$.
- 12.2.** Justifica que f é diferenciável em $] -2, 2[$.
- 12.3.** Mostra, usando o teorema de Lagrange, que a função f' , derivada de f , tem, pelo menos, um zero no intervalo $] -2, 2[$.
- 13.** Considera a função f definida por $f(x) = 3(2 - x)^2$. Determina os valores de x que satisfazem as seguintes condições:
- a) $f'(x) = 0$
- b) $f'(x) < 0$
- c) $f'(x) > 0$
- d) $f'(x) = -3$
- e) $f'(x) = 6$
- 14.** A partir do estudo do sinal da derivada, indica os intervalos de monotonia e os extremos relativos, caso existam, das seguintes funções reais de variável real:
- a) $f(x) = 4x^2 - 2x + 1$
- b) $g(x) = 3x^3 - 4x + 1$
- c) $h(x) = x^2(x - 2)$
- d) $i(x) = x(x - 4)(x + 2)$
- e) $j(x) = \frac{2x}{x - 4}$
- f) $k(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + 1}$
- 15.** O Ricardo quer alugar uma casa. Se ele escolher viver a x km do seu local de trabalho e os custos de transporte para o trabalho forem cx euros por ano, e os custos da renda da casa forem $\frac{40c}{x + 1}$ euros por ano, a que distância deve o Ricardo alugar a casa de modo a minimizar as despesas anuais de renda e de transporte?
- 16.** Considera um cilindro de altura h e raio da base x . Determina os valores de h e x de modo que o cilindro tenha o volume máximo quando inscrito numa dada esfera de raio r .

Soluções

1 1.1



- 1.2 a) $[-2, 1]$, por exemplo.
 b) $[1, 2]$, por exemplo.
 c) $[-1, 1]$, por exemplo.
 d) $[-2, 0]$, por exemplo.
 e) $[-1, 2]$, por exemplo.

2 $a = -2$

3 a) $y = 10x - 29$

b) $y = -\frac{1}{10}x + \frac{43}{2}$

c) $(-5, 1; 22, 01)$

4 a) $-400 \text{ m}^3/\text{min}$

b) $-1000 \text{ m}^3/\text{min}$

c) $-3000 \text{ m}^3/\text{min}$

5 a) -9 cm/s

b) 0 cm/s

c) 36 cm/s

6 a) $f(x) = 0$; $D_f = \mathbb{R}$

b) $f(x) = 4$; $D_f = \mathbb{R}$

c) $f(x) = -4x$; $D_f = \mathbb{R}$

d) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$; $D_f =]-1, +\infty[$

e) $f(x) = \frac{3}{(2-x)^2}$; $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

7 7.1 Ao cuidado do aluno.

7.2 $f(1) = 4$, logo, f não pode ser decrescente em $[1, 6]$, caso contrário, $f'(x) \leq 0, \forall x \in [1, 6]$ e, em particular, $f'(1)$ seria um valor não positivo.

- 8** a) $f'(x) = 5$; $D_f = \mathbb{R}$
 b) $g'(x) = 8x - 6$; $D_g = \mathbb{R}$
 c) $h'(x) = 64x^3 - 4x$; $D_h = \mathbb{R}$
 d) $i'(x) = -12x^2 + 12x + 2$; $D_i = \mathbb{R}$
 e) $j'(x) = 12 - \frac{4}{x^2}$; $D_j = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 f) $k'(x) = \frac{5}{(3-x)^2}$; $D_k = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
 g) $l'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x-2}}$; $D_l = \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$
 h) $m'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$; $D_m = \mathbb{R}_0^+$
 i) $n'(x) = -\frac{2x+15}{2\sqrt{x+4}(2x+1)^2}$; $D_n = \left] -4, -\frac{1}{2} \right[\cup \left] -\frac{1}{2}, +\infty \right[$
 j) $p'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x^2+x}}$; $D_p = \mathbb{R}^+$
 k) $q'(x) = -3\left[\frac{x-1}{(1-2x)^2}\right]^2$; $D_q = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$
 l) $r'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4}{3\sqrt[3]{2x}}$; $D_r = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

9 $b = -2$ e $c = 4$

- 10** a) $(f+g)'(x) = 8x + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$; $D_{(f+g)'} =]-1, +\infty[$
 b) $(fg)'(x) = 8x^2 + 8x^2\sqrt{x+1} + \frac{2x^2}{\sqrt{x+1}}$; $D_{(fg)'} =]-1, +\infty[$
 c) $(f \circ g)'(x) = 4 + \frac{4}{\sqrt{x+1}}$; $D_{(f \circ g)'} =]-1, +\infty[$
 d) $(g \circ f)'(x) = \frac{4}{\sqrt{4x^2+1}}$; $D_{(g \circ f)'} = \mathbb{R}$

- 11** a) $(4, -2)$
 b) $\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{4}\right)$

- 12** 12.2 a) f é uma função polinomial, logo, é contínua em \mathbb{R} . Portanto, f é contínua em qualquer subconjunto de \mathbb{R} e, por isso, é contínua em $[-2, 2]$.
 b) f é uma função polinomial, logo, é diferenciável em \mathbb{R} . Portanto, f é diferenciável em qualquer subconjunto de \mathbb{R} e, por isso, é diferenciável em $]-2, 2[$.
 c) Como f é contínua e diferenciável em $]-2, 2[$, então, pelo teorema de Lagrange, existe um $c \in]-2, 2[$, tal que $f'(c) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{0 - 0}{2 + 2} = 0$, pelo que se confirma que f' tem, pelo menos, um zero no intervalo $]-2, 2[$.

- 13** a) $x \in \{2\}$
 b) $x \in]-\infty, 2[$
 c) $x \in]2, +\infty[$
 d) $x \in \left\{ \frac{3}{2} \right\}$
 e) $x \in \{3\}$

- 14** a) f é crescente em $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$ e é decrescente em $\left]-\infty, \frac{1}{4}\right]$; mínimo relativo $\frac{3}{4}$ para $x = \frac{1}{4}$.
- b) g é crescente em $\left]-\infty, \frac{2}{3}\right]$ e em $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right[$ e é decrescente em $\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$; mínimo relativo $-\frac{7}{9}$ quando $x = \frac{2}{3}$ e máximo relativo $\frac{25}{9}$ quando $x = -\frac{2}{3}$.
- c) h é crescente em $\left]-\infty, 0\right]$ e em $\left[\frac{4}{3}, +\infty\right[$ e é decrescente em $\left[0, \frac{4}{3}\right]$; mínimo relativo $-\frac{32}{27}$ quando $x = \frac{4}{3}$ e máximo relativo 0 quando $x = 0$.
- d) i é crescente em $\left]-\infty, \frac{2-2\sqrt{7}}{3}\right]$ e em $\left[\frac{2+2\sqrt{7}}{3}, +\infty\right[$ e é decrescente em $\left[\frac{2-2\sqrt{7}}{3}, \frac{2+2\sqrt{7}}{3}\right]$; mínimo relativo $-\frac{160+112\sqrt{7}}{27}$ quando $x = \frac{2+2\sqrt{7}}{3}$ e máximo relativo $-\frac{160-112\sqrt{7}}{27}$ quando $x = \frac{2-2\sqrt{7}}{3}$.

15 Deve alugar a casa a cerca de 5,3 km do seu local de trabalho.

16 O volume máximo do cilindro ocorre quando $x = r\sqrt{\frac{2}{3}}$ e $h = r\frac{2\sqrt{3}}{3}$.