1. Utilizando a definição de derivada de uma função num ponto, calcule $f'(1)$, sendo *f* definida por:

1.1. $f(x)=\frac{5x-2}{3}$

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{5x-2}{3}-\frac{5-2}{3}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{5x-2-3}{3}}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{5x-5}{3x-3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to1}\frac{5(x-1)}{3(x-1)}=\frac{5}{3}$$

1.2. $f(x)\frac{2x-1}{x}$

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{2(1+h)-1}{1+h}-\frac{2-1}{1}}{h}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{h\to0}\frac{\frac{1+2h}{1+h}-1}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1+2h-1-h}{h(1+h)}=\lim_{h\to0}\frac{h}{h(1+h)}=\lim_{h\to0}\frac{1}{1+h}=1$$

2. Escreva a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de *g* nos pontos indicados.

2.1. $g(x)=x^3-x+1$, no ponto de abcissa $x=2$

$$g'(2)=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^3-x+1-8+2-1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^3-x-6}{x-2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+3)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x^2+2x+3)=4+4+3=11$$

Cálculo auxiliares:

	1	0	-1	-6
2		2	4	6
	1	2	3	$\boxed{0}$

$x^3-x-6=(x-2)(x^2+2x+3)$

$(2,g(2))$ é o ponto de tangência, então, $g(2)=2^3-2+1=7$, $(2,7)$ pertence à equação reduzida.

Assim, $y=11x+b\Rightarrow7=22+b\Leftrightarrow b=-15$

Portanto, $y=11x-15$ é a equação reduzida

2.2. $g(x)=\dfrac{x+2}{x}$, no ponto de ordenada $y=3$

Temos que descobrir a abcissa da função quando $y=3 \Leftrightarrow g(x)=3$

$g(x)=3 \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{x}=3 \Leftrightarrow x+2=3x \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow 2x=2 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x=1 \wedge x \neq 0$

Assim, $(1,3)$ é ponto de tangência

$$g'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1+h+2}{1+h}-3}{h}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3+h}{1+h}-3}{h}=$$

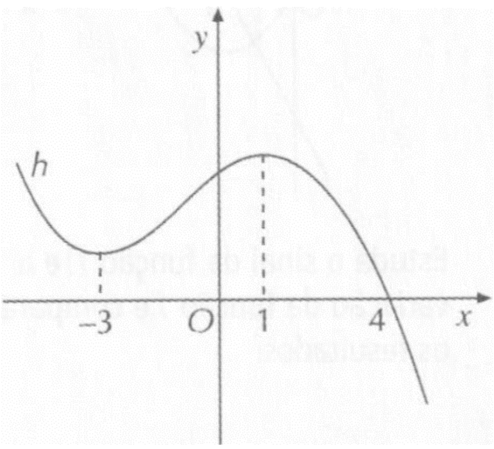
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3+h-3-3h}{1+h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2h}{h(1+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-2}{1+h}=\frac{-2}{1+0}=-2$$

$y=-2x+b \underset{(1,3)}{\Rightarrow} 3=-2+b \Leftrightarrow b=5$

Logo, $t=-2x+5$ é a equação reduzida

3. Observe o gráfico da função h

As retas tangentes à curva nos pontos de abcissa $x=-3$ e $x=1$ são paralelas ao eixo Ox. Indique se são verdadeiras ou falsas as afirmações:



3.1. $h'(-3)=0$

Verdadeira, porque a reta tangente à curva no ponto de abcissa $x=-3$ é paralela ao eixo Ox, ou seja, o declive da tangente é igual a zero.

3.2. $h'(2)>0$

Falsa, porque, por observação do gráfico, todas as tangentes ao gráfico depois do ponto de abcissa $x=1$, têm declive negativo, logo $h'(2)<0$

3.3. $h'(4)=0$

Falsa, justificação análoga à 3.2.

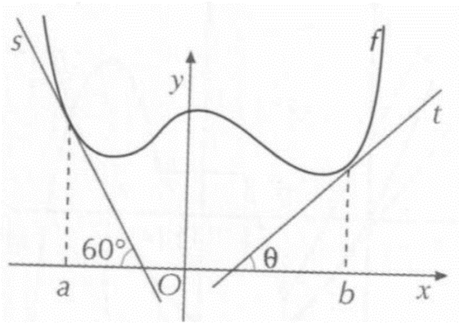
3.4. $h'(-4)<h(-4)$

Verdadeira, porque, por observação do gráfico, $h'(-4)<0$ e $h(-4)>0$, logo $h'(-4)<h(-4)$

3.5. $h'(1)\times h'(3)<0$

Falsa, porque, por observação do gráfico, $h'(1)=0$ e $h'(3)<0$, logo $h'(1)\times h'(3)=0$

4. As retas s e t são tangentes ao gráfico de uma função f, respetivamente nos pontos de abcissa a e b, como sugere a figura.



4.1. Indique o valor de $f'(a)$

A derivada de f no ponto de abcissa a é igual ao declive da reta tangente, ou seja, $f'(a)=m$ e

$m=\tan\alpha \Leftrightarrow m=\tan(180^{\circ}-60^{\circ}) \Leftrightarrow m=\tan(120^{\circ}) \Leftrightarrow m=-\sqrt{3}$

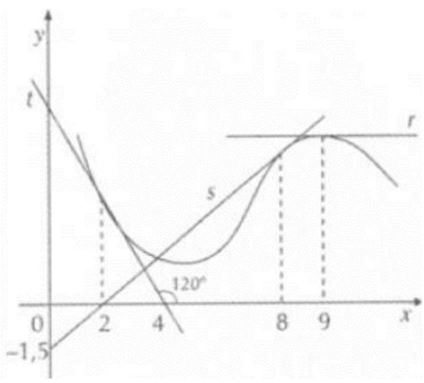
Logo $f'(a)=-\sqrt{3}$

4.2. Se $f'(b)=0,8$, determine o valor de θ, aproximado às centésimas de grau

Seja $f'(b)=0,8 \Rightarrow m=0,8 \Leftrightarrow \tan\theta=0,8 \Leftrightarrow \theta=\tan^{-1}(0,8) \Leftrightarrow \theta\approx 38,66$

5. Observa a figura. As retas r, s e t são tangentes ao gráfico da função f que se encontra representado graficamente.

A reta r é paralela ao eixo Ox. Complete:



5.1. $f'(2)$

$f'(2)=\tan(120^{\circ})=-\sqrt{3}$

5.2. $f'(8)$

$f'(8)$ é igual ao declive da reta s

$$m_s=\frac{-\frac{3}{2}-0}{0-2}=\frac{3}{4}$$

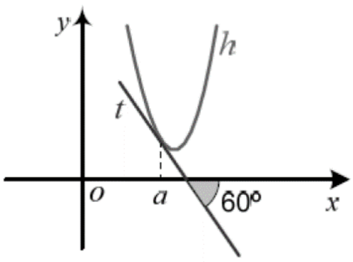
$$f'(8)=\frac{3}{4}$$

5.3. $f'(9)$

O declive da reta r é igual a zero, logo $f'(9)=0$

6. A reta t é tangente ao gráfico da função h que se encontra representada graficamente no referencial da figura.

O valor de $h'(a)$, derivada de h no ponto de abcissa a, é:



(A) $\sqrt{3}$ (B) $-\sqrt{3}$

(C) $-\frac{1}{2}$ (D) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

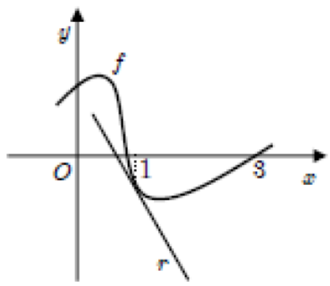
$h'(a)=\tan(180^{\circ}-60^{\circ})=\tan(120^{\circ})=-\sqrt{3}$

OPÇÃO: B

7. Na figura estão representados:

- parte do gráfico de uma função f, derivável em IR ;
- uma reta r , tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1

Qual pode ser o valor de $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$?



(A) 1 (B) $f(0)$ (C) $f(3)$ (D) $\dfrac{1}{f(1)}$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ é a derivada da função no ponto de abcissa 1, ou seja, é o declive da reta r

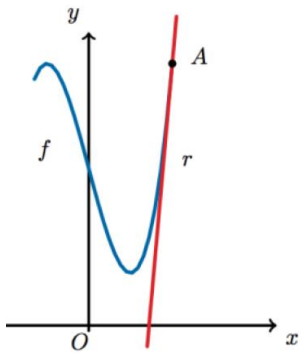
Logo, por observação do gráfico, o declive da reta r é negativo.

Assim, como $1>0$, $f(0)>0$ e $f(3)=0$ temos que **(A),** (B) **e** (C) não são opções possíveis.

Como $f(1)<0$ então $\dfrac{1}{f(1)}<0$, logo a opção **(D)** pode ser um valor possível

OPÇÃO: D

8. Na figura ao lado está representada, num referencial o.n. *Oxy*, parte do gráfico de uma função f, contínua de domínio *IR*. Tal como a figura sugere a reta r de equação $y=5x-5$ é a reta tangente ao gráfico de f no ponto $A(2,5)$



Qual o valor de $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^2(x)-f^2(2)}{x-2}$?

(A) 50 (B) 25 (C) 20 (D) 10

$$\lim_{x\to 2}\frac{f^2(x)-f^2(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\big(f(x)-f(2)\big)\big(f(x)+f(2)\big)}{x-2}=\underbrace{\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}}_{\text{Por definição de derivada } \lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} \text{ é igual ao declive da reta tangente.}}\times\lim_{x\to 2}\big(f(x)+f(2)\big)=$$

$$=5\times\big(f(2)+f(2)\big)=5\times(5+5)=50$$

OPÇÃO: A

9. Seja f uma função real de variável real da qual se sabe que a reta tangente ao seu gráfico no ponto de abcissa 3 tem inclinação 45º

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{9-x^2}$

(A) $\dfrac{1}{6}$ (B) $-\dfrac{1}{6}$ (C) 1 (D) -1

Como a reta tangente ao gráfico tem inclinação de 45º, então, $m=\tan(45^\circ)=1$, e como a reta é tangente ao gráfico no ponto de abcissa 3, significa que $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=1$

$$\lim_{h\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{9-x^2}=\lim_{h\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{(3-x)(3+x)}=\lim_{h\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{3-x}\times\frac{1}{x+3}=\underbrace{\lim_{h\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{-(x-3)}}_{\text{Definição de derivada}}\times\lim_{h\to 3}\frac{1}{x+3}=$$

$$=-1\times\frac{1}{3+3}=-\frac{1}{6}$$

OPÇÃO: B

10. Seja f uma função cuja derivada no ponto de abcissa 2 é igual a 3. Indique o valor de

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x^3+x^2-6x}$$

(A) 3 (B) $\dfrac{3}{5}$ (C) $\dfrac{3}{10}$ (D) não existe

Temos que $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=3$, então

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x^3+x^2-6x}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x(x^2+x-6)}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x(x+3)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x(x+3)}\times\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=$$

$$=\frac{1}{10}\times 3=\frac{3}{10}$$

Cálculos auxiliares: $x^2+x-6=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{25}}{2}\Leftrightarrow x=-3\vee x=2$

OPÇÃO: C

11. Seja f uma função tal que $f'(3)=2$. Então, $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x^2-x-6}$ é:

(A) 2 (B) $\dfrac{2}{5}$ (C) 1 (D) 0

Temos $f'(3)=2\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=2$, então

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x^2-x-6}=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{(x+2)(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+2}\times\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\frac{1}{5}\times 2=\frac{2}{5}$$

Cálculos auxiliares: $x^2-x-6=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{25}}{2}\Leftrightarrow x=3\vee x=-2$

OPÇÃO: B