Funções Reais de Variável Real – Derivadas Global

1. Considera a função g, real de variável real, definida por:

$$g(x) = x^3 - x$$

Sabe-se que os pontos A e B pertencem ao gráfico de g e têm abcissas -2 e 1 , respetivamente.

1.1 Determina a equação reduzida da reta AB .

Seja m o declive da reta AB .

Então, $m = \dfrac{g(1) - g(-2)}{1 - (-2)} = \dfrac{0 + 6}{3} = 2$.

Logo, a equação da reta AB é do tipo $y = 2x + b$.

Substituindo as coordenadas de B , por exemplo, obtém-se:

$$0 = 2 + b \Leftrightarrow b = -2$$

Portanto, a equação reduzida de AB é $y = 2x - 2$.

1.2 A reta AB interseta o gráfico de g em mais algum ponto? Justifica.

$x^3 - x = 2x - 2 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$

Aplicando a regra de Ruffini:

	1	0	−3	2
1		1	1	−2
	1	1	−2	0
−2		−2	2	
	1	−1	0	

$x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2 \vee x = 1$

Portanto, a reta AB só interseta o gráfico de g nos pontos A e B .

2. Seja a um número real e considera f a função real de variável real, definida por:

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 + ax - 1}$$

Determina a de modo que a taxa média de variação de f no interval $[0 , 2]$ seja 1.

$\text{t.m.v.}_{[0,\,2]} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{2^2 + 2a - 1 + 1}{2} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 + a = 1 \Leftrightarrow a = -1$

3. Seja k um número real e considera f a função real de variável real, definida por:

$$\boldsymbol{f(x) = 2 - kx^2}$$

Determina k de modo que a derivada de f em $x = -1$ seja 4.

$$f'(-1) = 4 \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{2 - k(-1+h)^2 - (2-k)}{h} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{2 - k + 2kh - kh^2 - 2 + k}{h} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} (2k - kh) = 4 \Leftrightarrow 2k = 4 \Leftrightarrow k = 2$$

4. Determina a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1 , sendo a função real de variável real definida por:

a) $\boldsymbol{f(x) = 3x + 2}$ **b)** $\boldsymbol{f(x) = -x^2 + 2x}$

a) $f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(-1+h) + 2 + 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h} = 3$

Logo, a equação da reta é do tipo $y = 3x + b$.

Tem-se que $f(-1) = -1$. Substituindo, vem $-1 = -3 + b \Leftrightarrow b = 2$.

Portanto, a equação reduzida da reta é $y = 3x + 2$.

b) $f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-(-1+h)^2 + 2(-1+h) + 1 + 2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1 + 2h - h^2 - 2 + 2h + 1 + 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h^2 + 4h}{h} =$$

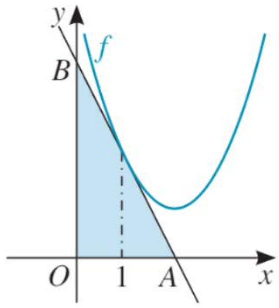
$$= \lim_{h \to 0} (-h + 4) = 4$$

Logo, a equação da reta é do tipo $y = 4x + b$.

Tem-se que $f(-1) = -3$. Logo, a equação reduzida da reta é $y = 4x + 1$.

5. Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy . parte do gráfico da função f . definida por $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 4x + 5}$; a reta r , tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1 ; e o triângulo $[OBA]$, sendo A e B os pontos de interseção de r com os eixos Ox e Oy , respetivamente.

Calcula a área do triângulo $[OBA]$.



$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 4(1+h) + 5 - 2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 4 - 4h + 5 - 2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2h + h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0}(-2 + h) = -2$$

Logo, a equação da reta é do tipo $y = -2x + b$.

Tem-se que $f(1) = 2$. Substituindo, vem: $2 = -2 + b \Leftrightarrow b = 4$.

Portanto, a equação reduzida da reta é $y = -2x + 4$.

Assim, tem-se $B(0, 4)$ e $A(2, 0)$.

Então, $A_{[OBA]} = \frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = \frac{2 \times 4}{2} = 4$ u. a.

6. Utilizando a definição de derivada num ponto, determina a expressão da função derivada das funções seguintes, indicando o respetivo domínio.

a) $\boldsymbol{f(x) = 3x + 2}$

b) $\boldsymbol{f(x) = 2 - x^2}$

c) $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x - 3}}$

d) $\boldsymbol{f(x) = \frac{2x}{x-1}}$

a) $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(x_0 + h) + 2 - 3x_0 - 2}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x_0 + 3h - 3x_0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h} = 3$$

Logo, $f'(x) = 3$ e $D_{f'} = \mathbb{R}$.

b) $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 - (x_0 + h)^2 - 2 + x_0^2}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 - x_0^2 - 2x_0 h - h^2 - 2 + x_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2x_0 h - h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0}(-2x_0 - h) = -2x_0$$

Logo, $f'(x) = -2x$ e $D_{f'} = \mathbb{R}$.

c) $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{(x_0+h)-3} - \sqrt{x_0-3}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\left(\sqrt{(x_0+h)-3} - \sqrt{x_0-3}\right)\left(\sqrt{(x_0+h)-3} + \sqrt{x_0-3}\right)}{h\left(\sqrt{(x_0+h)-3} + \sqrt{x_0-3}\right)} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x_0 + h - 3 - x_0 + 3}{h\left(\sqrt{(x_0+h)-3} + \sqrt{x_0-3}\right)} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{(x_0+h)-3} + \sqrt{x_0-3}} = \dfrac{1}{\sqrt{x_0-3} + \sqrt{x_0-3}} =$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{x_0-3}}$, com $x_0 \neq 3$

Logo, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}$ e $D_{f'} =]3, -\infty[$.

d) $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{2(x_0+h)}{x_0+h-1} - \dfrac{2x_0}{x_0-1}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2x_0 + 2h)(x_0 - 1) - 2x_0(x_0 + h - 1)}{h(x_0 + h - 1)(x_0 - 1)} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2x_0^2 - 2x_0 + 2hx_0 - 2h - 2x_0^2 - 2hx_0 + 2x_0}{h(x_0 + h - 1)(x_0 - 1)} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-2}{(x_0 + h - 1)(x_0 - 1)} = \dfrac{-2}{(x_0 - 1)^2}$, com $x_0 \neq 1$

Logo, $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$ e $D_{f'} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

7. Considera a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = x^2 - 2x$$

7.1 Mostra que:

$$f'(x) = 2x - 2 \,, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - 2(x_0 + h) - x_0^2 + 2x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0 h + h^2 - 2x_0 - 2h - x_0^2 + 2x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2x_0 h + h^2 - 2h}{h} = \lim_{h \to 0}(2x_0 + h - 2) = 2x_0 - 2$$

Logo, $f'(x) = 2x - 2$ e $D_{f'} = \mathbb{R}$.

7.2 Calcula $f'(0)$ e conclui que *f* não é decrescente em $\mathbb{R}$.

$f'(0) = -2 < 0$; portanto, não é crescente em $\mathbb{R}$.

8. Seja *f* a função real de variável real, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ x + 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Justifica que *f* não é contínua em 0. O que concluis acerca da diferenciabilidade em 0?

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x + 1) = 1$

Como $\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)$, não existe $\lim_{x \to 0} f(x)$ e, sendo assim, f não é contínua em $x = 0$.

Pode-se, então, concluir que f também não é diferenciável em $x = 0$, por implicação contrarrecíproca.

9. Sejam *a* e *b* reais e considera a função *f* definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4ax & \text{se } x \geq 1 \\ \dfrac{b}{x} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Determina os valores de *a* e de *b* de forma que *f* seja diferenciável em 1.

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 + 4ax) = 1 + 4a = f(1)$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{b}{x} = b$

Como f é diferenciável em $x = 1$, tem-se que f é contínua em $x = 1$ e, sendo assim, $b = 1 + 4a$.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x \to 0^-} \frac{(1+h)^2 + 4a(1+h) - 1 - 4a}{h} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{h^2 + 2h + 4ah}{h} = \lim_{x \to 0^-} (h + 2 + 4a) = 2 + 4a$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{b}{1+h} - 1 - 4a}{h} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{b - 1 - h - 4a - 4ah}{h(1+h)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 + 4a - 1 - h - 4a - 4ah}{h(1+h)} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-h(1+4a)}{h(1+h)} = -1 - 4a$$

Então:

$$\begin{cases} 2 + 4a = -1 - 4a \\ 1 + 4a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{3}{8} \\ b = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Logo, os valores de a e de b são, respetivamente, $-\dfrac{3}{8}$ e $-\dfrac{1}{2}$.

10. Seja *g* a função real de variável real, definida por:

$$g(x) = x + \frac{1}{x}$$

10.1 Caracteriza a função g'

$$g'(x) \underset{\text{Tarefa 2}}{=} (x)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2}\ ;\ D_{g'} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

10.2 Determina $\boldsymbol{g'(2)}$ e escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de g em $x = 2$.

$g'(2) = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$

Equação reduzida da reta tangente ao gráfico de g em $x = 2$:

$y = g'(2)(x-2) + g(2) \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}(x-2) + \frac{5}{2} \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + 1$

10.3 Resolve, em $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{g'(x) \leq 0}$.

$g'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x^2} \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$

$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
x^2	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x^2-1}{x^2}$	$+$	0	$-$	n.d.	$-$	0	$+$

C.S. $= [-1, 1]\backslash\{0\}$

11. Considera a função g real de variável real, definida por:

$$g(x) = \frac{3x-1}{x-1}$$

Determina as coordenadas de um ponto no 1º quadrante em que a reta tangente ao gráfico de g , que passa por esse pontos seja:

a) paralela à bissetriz dos quadrantes pares.

$$g'(x) = \frac{(3x-1)'(x-1) - (3x-1)(x-1)'}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

Se é paralela à bissetriz dos quadrantes pares, então, tem declive -1 .

Tem-se que:

$$-\frac{2}{(x-1)^2}=-1 \Leftrightarrow (x-1)^2=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1=\pm\sqrt{2} \Leftrightarrow x=1-\sqrt{2} \vee x=1+\sqrt{2}$$

Como o ponto pertence ao 1.º quadrante, a sua abcissa é positiva; então, as suas coordenadas são $\left(1+\sqrt{2}, g\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$, isto é, $\left(1+\sqrt{2}, \sqrt{2}+3\right)$.

b) perpendicular à reta de equação $\boldsymbol{y=2x+1}$.

Se é perpendicular à reta de equação $y=2x+1$, então, tem declive $-\frac{1}{2}$.

Tem-se que:

$$-\frac{2}{(x-1)^2}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow (x-1)^2=4 \Leftrightarrow x-1=\pm\sqrt{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \vee x=3$$

Como o ponto pertence ao 1.º quadrante, então, $x=3$. Substituindo em g , obtém-se:

$$g(3)=\frac{3\times 3-1}{3-1}=4$$

As coordenadas do ponto são $(3, 4)$.

12. Considera as funções f e g reais de variável real, definidas por:

$$\boldsymbol{f(x)=3x^5-x^3-2 \text{ e } g(x)=\frac{x^4}{x^3+1}}$$

12.1 Caracteriza a função derivada das funções f e g .

$$f'(x)=(3x^5-5x^3-2)'=15x^4-15x^2\,;\; D_{f'}=\mathbb{R}$$

$$g'(x)=\left(\frac{x^4}{x^3+1}\right)'=\frac{(x^4)'(x^3+1)-x^4(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}=$$

$$=\frac{4x^3(x^3+1)-x^4(3x^2)}{(x^3+1)^2}=\frac{x^6+4x^3}{(x^3+1)^2}\,;\; D_{g'}=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$$

12.2 Determina os zeros de $\boldsymbol{f'}$ e de $\boldsymbol{g'}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 15x^4 - 15x^2 = 0 \Leftrightarrow 15x^2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 15x^2 = 0 \vee x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$

Os zeros de f' são -1 , 0 e 1 .

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^6 + 4x^3}{(x^3 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^6 + 4x^3 = 0 \wedge (x^3 + 1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3(x^3 + 4) = 0 \wedge x^3 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \left(x = 0 \vee x = -\sqrt[3]{4}\right) \wedge x \neq -1$

Os zeros de g' são 0 e $-\sqrt[3]{4}$.

13. Considera a função f , real de variável real, definida por:

$$\boldsymbol{f(x) = 2\sqrt[3]{x} - x^{\frac{1}{6}} + 1}$$

13.1 Caracteriza $\boldsymbol{f'}$.

$f'(x) = \left(2\sqrt[3]{x} - x^{\frac{1}{6}} + 1\right)' = 2 \times \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{6}x^{-\frac{5}{6}} =$

$= \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1}{6\sqrt[6]{x^5}} = \dfrac{4}{6x^{\frac{2}{3}}} \times \dfrac{x^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{6}}} - \dfrac{1}{6x^{\frac{5}{6}}} = \dfrac{4x^{\frac{1}{6}} - 1}{6x^{\frac{5}{6}}}$

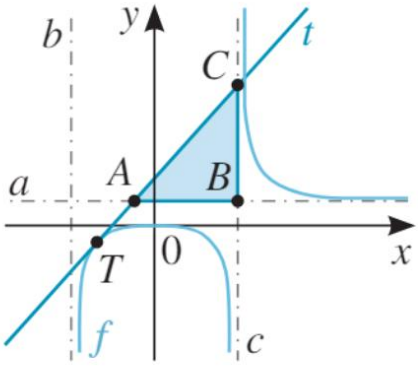
$D_{f'} = \mathbb{R}^+$

13.2 Determina a abcissa do ponto do gráfico de f , em que a reta tangente é paralela ao eixo das abcissas.

Se a reta tangente é paralela ao eixo das abcissas, então, o seu declive é 0 .
Para $x > 0$, tem-se:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x^{\frac{1}{6}} - 1}{6x^{\frac{5}{6}}} = 0 \Leftrightarrow 4x^{\frac{1}{6}} - 1 = 0 \Leftrightarrow x^{\frac{1}{6}} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x = \left(\dfrac{1}{4}\right)^6$

14. Na figura estão representados:



- parte do gráfico da função de domínio $]-\mathbf{3}, +\infty[\backslash\{\mathbf{3}\}$, tal que:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 9}}$$

- a reta t, tangente ao gráfico de f no ponto T de abcissa $\boldsymbol{x = -2}$;
- as retas a , b e c , assíntotas do gráfico de f ;
- os pontos A e C , pontos de interseção de t com as retas a e c , respetivamente;
- o ponto B , ponto de interseção das retas a e c .

Determina a área do triângulo $[ABC]$.

Tem-se $f'(x) = \left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 - 9}\right)' = -\frac{34x}{(x^2 - 9)^2}$.

Uma equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f em $x = -2$:

$$y = f'(-2)(x + 2) + f(2) \Leftrightarrow y = \left(-\frac{34(-2)}{((-2)^2 - 9)^2}\right)(x + 2) + \frac{2(-2)^2 - 1}{(-2)^2 - 9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{68}{25}(x + 2) - \frac{7}{5} \Leftrightarrow y = \frac{68}{25}x + \frac{101}{25}$$

Assíntotas do gráfico de f :

$D_f =]-3, +\infty[$

As retas de equação $x = -3$ e $x = -3$ são assíntotas verticais ao gráfico da função f .

Calcule-se o limite em $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 9} = 2$$

Logo, a reta de equação $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico da função f .

Coordenadas de A :

$$\begin{cases} y = \frac{68}{25}x + \frac{101}{25} \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{68}{25}x + \frac{101}{25} = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{4} \\ y = 2 \end{cases}$$

Então, $A\left(-\frac{3}{4}, 2\right)$.

O ponto B é a interseção das assíntotas a e c ; logo, $B(3, 2)$.

Coordenadas de C :

$$\begin{cases} y = \frac{68}{25}x + \frac{101}{25} \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{68}{25} \times 3 + \frac{101}{25} \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{61}{5} \\ x = 3 \end{cases}$$

Então, $C\left(3, \frac{61}{5}\right)$.

A área do triângulo retângulo $[ABC]$ é:

$$A_{[ABC]}=\frac{\overline{AB}\times\overline{BC}}{2}=\frac{\left(3-\left(-\frac{3}{4}\right)\right)\times\left(\frac{61}{5}-2\right)}{2}=$$

$$=\frac{\frac{15}{4}\times\frac{51}{5}}{2}=\frac{765}{40}=\frac{153}{8}\text{ u. a.}$$