Funções Reais de Variável Real – Derivadas Global

1. Considera a função g, real de variável real, definida por:

$$g(x) = x^3 - x$$

Sabe-se que os pontos A e B pertencem ao gráfico de g e têm abcissas -2 e 1 , respetivamente.

1.1 Determina a equação reduzida da reta AB .

1.2 A reta AB interseta o gráfico de g em mais algum ponto? Justifica.

2. Seja a um número real e considera f a função real de variável real, definida por:

$$f(x) = x^2 + ax - 1$$

Determina a de modo que a taxa média de variação de f no interval $[0 , 2]$ seja 1.

3. Seja k um número real e considera f a função real de variável real, definida por:

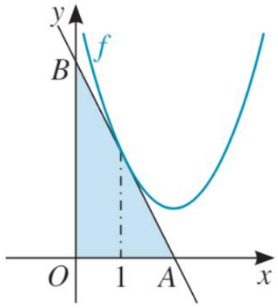
$$f(x) = 2 - kx^2$$

Determina k de modo que a derivada de f em $x = -1$ seja 4.

4. Determina a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1 , sendo a função real de variável real definida por:

a) $f(x) = 3x + 2$ **b)** $f(x) = -x^2 + 2x$

5. Na figura estão representados, em referencial o.n. xOy . parte do gráfico da função f . definida por $f(x) = x^2 - 4x + 5$; a reta r , tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1 ; e o triângulo $[OBA]$, sendo A e B os pontos de interseção de r com os eixos Ox e Oy , respetivamente.



Calcula a área do triângulo $[OBA]$.

6. Utilizando a definição de derivada num ponto, determina a expressão da função derivada das funções seguintes, indicando o respetivo domínio.

a) $f(x) = 3x + 2$

b) $f(x) = 2 - x^2$

c) $f(x) = \sqrt{x - 3}$

d) $f(x) = \frac{2x}{x-1}$

7. Considera a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = x^2 - 2x$$

7.1 Mostra que:

$$f'(x) = 2x - 2 \, , \forall x \in \mathbb{R}$$

7.2 Calcula $f'(0)$ e conclui que f não é decrescente em $\mathbb{R}$.

8. Seja f a função real de variável real, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ x + 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Justifica que f não é contínua em 0. O que concluis acerca da diferenciabilidade em 0?

9. Sejam a e b reais e considera a função f definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4ax & \text{se } x\geq 1 \\ \dfrac{b}{x} & \text{se } x<1 \end{cases}$$

Determina os valores de a e de b de forma que f seja diferenciável em 1.

10. Seja g a função real de variável real, definida por:

$$g(x)=x+\frac{1}{x}$$

10.1 Caracteriza a função g'

10.2 Determina $g'(2)$ e escreve a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de g em $x = 2$.

10.3 Resolve, em $\mathbb{R}$, $g'(x)\leq 0$.

11. Considera a função g real de variável real, definida por:

$$g(x)=\frac{3x-1}{x-1}$$

Determina as coordenadas de um ponto no 1º quadrante em que a reta tangente ao gráfico de g , que passa por esse pontos seja:

a) paralela à bissetriz dos quadrantes pares.

b) perpendicular à reta de equação $y=2x+1$.

12. Considera as funções f e g reais de variável real, definidas por:

$$f(x) = 3x^5 - x^3 - 2 \text{ e } g(x) = \frac{x^4}{x^3+1}$$

12.1 Caracteriza a função derivada das funções f e g .

12.2 Determina os zeros de f' e de g' .

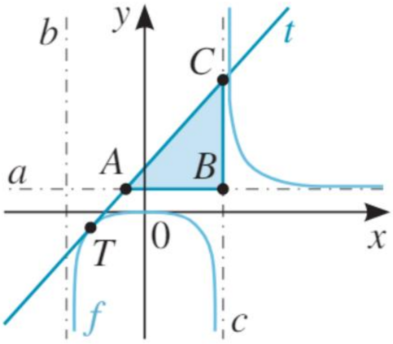
13. Considera a função f , real de variável real, definida por:

$$f(x) = 2\sqrt[3]{x} - x^{\frac{1}{6}} + 1$$

13.1 Caracteriza f' .

13.2 Determina a abcissa do ponto do gráfico de f , em que a reta tangente é paralela ao eixo das abcissas.

14. Na figura estão representados:



- parte do gráfico da função de domínio $]-3,+\infty[\backslash\{3\}$, tal que:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 9}$$

- a reta t , tangente ao gráfico de f no ponto T de abcissa $x = -2$;
- as retas a , b e c , assíntotas do gráfico de f ;
- os pontos A e C , pontos de interseção de t com as retas a e c , respetivamente;
- o ponto B , ponto de interseção das retas a e c .

Determina a área do triângulo $[ABC]$.

Soluções

1.1 Reta reduzida *AB* é $y = 2x - 2$

1.2 Não.

2. $a = -1$

3. $k = 2$

4.a) $y = 3x + 2$

4.b) $y = 4x + 1$

5. 4

6.a) $f'(x) = 3\ ;\ D_{f'} = \mathbb{R}$

6.b) $f'(x) = -2x\ ;\ D_{f'} = \mathbb{R}$

6.c) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}\ ;\ D_{f'} =]3, +\infty[$

6.d) $f'(x) = -\frac{2}{(x-1)^2}\ ;\ D_{f'} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$

9. $a = -\frac{3}{8}$ e $b = -\frac{1}{2}$

10.1 $g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}\ ;\ D_{g'} = \mathbb{R}\backslash\{0\}$

10.2 $g'(2) = \frac{3}{4}\ ;\ y = \frac{3}{4}x + 1$

10.3 $\text{C.S.} = [-1, 1]\backslash\{0\}$

11. $\left(1 + \sqrt{2}, \sqrt{2} + 3\right)$

12.1 $f'(x) = 15x^4 - 15x^2\ ;\ D_{f'} = \mathbb{R}$

12.2 zeros de f' são -1 , 0 e 1 e os zeros de g' são 0 e $-\sqrt[3]{4}$

13.1 $f'(x) = \frac{4x^{\frac{1}{6}} - 1}{6x^{\frac{5}{6}}}\ ;\ D_{f'} = \mathbb{R}^+$

13.2 $x = \left(\frac{1}{4}\right)^6$

14. $\frac{158}{3}$