



### Funções Reais de Variável Real – Continuidade de funções 1

1. Estuda a continuidade de cada uma das funções seguintes em  $x = 0$ .

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{0+1}+1} = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = 0$$

Como  $f(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , logo  $f$  não é contínua em  $x = 0$

$$\text{b) } g(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2-3x} & \text{se } x < 0 \\ -\frac{1}{3} & \text{se } x = 0 \\ \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}-3} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}-3} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x^2-3x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x(x-3)} = \frac{1}{0-3} = -\frac{1}{3}$$

$$g(0) = -\frac{1}{3}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) = -\frac{1}{3}$ ,  $g$  é contínua em  $x = 0$

2. Para cada uma das alíneas seguintes, determina o valor de  $k$  de modo que a respetiva função seja contínua em  $\mathbb{R}$ .

a) 
$$h(x) = \begin{cases} \frac{2}{kx} & \text{se } x \geq 1 \\ 2 - x & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

•  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{kx} = \frac{2}{k}$

•  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2 - x) = 1$

Para que a função  $g$  seja contínua em  $\mathbb{R}$ :

$g(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \Leftrightarrow \frac{2}{k} = 1 \Leftrightarrow k = 2$

Logo,  $k = 2$ .

b) 
$$i(x) = \begin{cases} x - k & \text{se } x > -1 \\ k - 1 & \text{se } x = -1 \\ \frac{kx+1}{x} & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

•  $\lim_{x \rightarrow -1^-} i(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{kx+1}{x} = \frac{-k+1}{-1} = k-1 = i(-1)$

•  $\lim_{x \rightarrow -1^+} i(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x - k) = -1 - k$

Para que a função  $i$  seja contínua em  $\mathbb{R}$ :

$i(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} i(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} i(x) \Leftrightarrow k-1 = -1-k$   
 $\Leftrightarrow 2k = 0$   
 $\Leftrightarrow k = 0$

Logo,  $k = 0$ .

3. Estuda a continuidade de cada uma das seguintes funções.

a) 
$$j(x) = \begin{cases} \frac{x}{2-\sqrt{4-x}} & \text{se } x < 0 \\ 4 & \text{se } x = 0 \\ \frac{x^2+4x}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

No intervalo  $]-\infty, 0[$  a função é contínua, pois é o quociente entre duas funções contínuas: uma, que é uma função afim, e outra, que é a diferença entre uma função constante e a raiz quadrada de uma função afim.

No intervalo  $]0, +\infty[$  a função é contínua, pois é uma função racional.

•  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{2-\sqrt{4-x}} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(2+\sqrt{4-x})}{(2-\sqrt{4-x})(2+\sqrt{4-x})} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(2+\sqrt{4-x})}{4-4+x} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(2+\sqrt{4-x})}{x} =$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0^-} (2+\sqrt{4-x}) =$   
 $= 4$

•  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+4) = 4$

•  $f(0) = 4$

Uma vez que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 4$ , conclui-se que  $f$  é contínua em  $x = 0$ .

Logo,  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$ .

$$b) \quad k(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} & \text{se } x < 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

No intervalo  $]-\infty, 1[$  a função é contínua, pois é o quociente entre duas funções contínuas: uma, que é uma função afim, e outra, que é a diferença entre uma função afim e a raiz quadrada de uma função afim.

No intervalo  $]1, +\infty[$  a função é contínua, pois é o quociente entre duas funções contínuas: uma, que é uma função afim, e outra, que é a raiz quadrada de uma função afim.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+\sqrt{x})}{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+\sqrt{x})}{x^2-x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+\sqrt{x})}{x(x-1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+\sqrt{x}}{x} = \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}\sqrt{x-1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)\sqrt{x-1}}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Uma vez que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ , conclui-se que não existe  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$  e, então,  $g$  não é contínua em  $x = 1$ .

Logo,  $g$  é contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

4. Sejam  $f$  e  $g$  duas funções definidas em  $\mathbb{R}$  por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x-2} & \text{se } x \leq 1 \\ x+1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

a) Mostra que as funções  $f$  e  $g$  não são contínuas em  $x = 1$ .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x+1) = 3 = f(1)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x} = 1$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ , então  $f$  não é contínua em  $x = 1$ .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( \frac{x-1}{x-2} \right) = 0 = g(1)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$ , então  $g$  não é contínua em  $x = 1$ .

**b)** Defina a função  $f + g$  e mostra que é uma função contínua em  $x = 1$ .

$$(f + g)(x) = \begin{cases} 2x + 1 + \frac{x-1}{x-2} & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} + x + 1 & \text{se } x > 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{2x^2 - 2x - 3}{x-2} & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{x^2 + x + 1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} (f + g)(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 2x - 3}{x-2} = \\ &= \frac{2 - 2 - 3}{1 - 2} = \\ &= 3 = (f + g)(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} (f + g)(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x + 1}{x} = \\ &= \frac{1 + 1 + 1}{1} = \\ &= 3 \end{aligned}$$

Como  $(f + g)(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (f + g)(x)$ ,  
então  $f + g$  é contínua em  $x = 1$ .