Funções Reais de Variável Real – Continuidade de funções 1

1. Estuda a continuidade de cada uma das funções seguintes em $x = 0$.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2-3x} & \text{se } x < 0 \\ -\frac{1}{3} & \text{se } x = 0 \\ \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}-3} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

2. Para cada uma das alíneas seguintes, determina o valor de k de modo que a respetiva função seja contínua em $\mathbb{R}$.

a) $h(x) = \begin{cases} \frac{2}{kx} & \text{se } x \geq 1 \\ 2 - x & \text{se } x < 1 \end{cases}$

b) $i(x) = \begin{cases} x - k & \text{se } x > -1 \\ k - 1 & \text{se } x = -1 \\ \frac{kx+1}{x} & \text{se } x < -1 \end{cases}$

3. Estuda a continuidade de cada uma das seguintes funções.

a) $j(x) = \begin{cases} \frac{x}{2-\sqrt{4-x}} & \text{se } x < 0 \\ 4 & \text{se } x = 0 \\ \frac{x^2+4x}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

b) $k(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} & \text{se } x < 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} & \text{se } x > 1 \end{cases}$

4. Sejam f e g duas funções definidas em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x-2} & \text{se } x \leq 1 \\ x + 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

a) Mostra que as funções f e g não são contínuas em $x = 1$.

b) Define a função $f + g$ e mostra que é uma função contínua em $x = 1$.

Soluções

1.

a) Não é contínua em $x = 0$

b) É contínua em $x = 0$

2.

a) $k = 2$

b) $k = 0$

3.

a) Contínua no intervalo $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$ e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 4$, Logo f é contínua em $\mathbb{R}$

b) Contínua no intervalo $]-\infty, 1[$ e $]1, +\infty[$ e $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$, Logo f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

4.

a) $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$, então f não é contínua em $x = 1$

$\lim_{x\to 1^-} g(x) \neq \lim_{x\to 1^+} g(x)$, então g não é contínua em $x = 1$

b) $(f + g)(1) = \lim_{x\to 1^-} (f + g)(x) = \lim_{x\to 1^+} (f + g)(x)$, então $f + g$ é contínua em $x = 1$