**1.** Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores tais que $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=4$ e $(\vec{u} \hat{\ } \vec{v})=\frac{2\pi}{3}$.
Determina:

a) $(2\vec{u})\cdot\vec{v}$

b) $\vec{u}\cdot(5\vec{v})$

c) $(-2\vec{u})\cdot(5\vec{v})$

d) $\vec{u}\cdot(\vec{u}+4\vec{v})$

a) $(2\vec{u})\cdot\vec{V} = 2(\vec{u}\cdot\vec{V}) = 2(\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{V}\|\cdot\cos(\vec{u} \hat{\ } \vec{V})) =$

$= 2(3\times 4\cdot\cos(\frac{2\pi}{3})) = 24\times(-\frac{1}{2}) = -12$

b) $\vec{u}\cdot(5\vec{V}) = 5\,\vec{u}\cdot\vec{V} = 5(3\cdot 4\cdot\cos(\frac{2\pi}{3})) =$

$= 60\times(-\frac{1}{2}) = -30$

c) $(-2\vec{u})\cdot(5\vec{V}) = -10\,\vec{u}\cdot\vec{V} = -10(3\cdot 4\cdot\cos(\frac{2\pi}{3})) =$

$= -120\cdot(-\frac{1}{2}) = 60$

d) $\vec{u}\cdot(\vec{u}+4\vec{V}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + 4\,\vec{u}\cdot\vec{V} =$

$= \|\vec{u}\|^2 + 4(3\cdot 4\cdot\cos(\frac{2\pi}{3})) =$

$= 9 + 48\cdot(-\frac{1}{2}) = 9 - 24 = -15$

**2.** De um triângulo $[ABC]$ sabe-se que: $\overline{AB}=10$, $\overline{AC}=6$ e $B\hat{A}C=60°$.

**a)** Determina $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

**b)** Determina $\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

C. A.

$\cos 60° =$

$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|\cdot\cos(\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,\overrightarrow{AC}) =$

$= 10\cdot 6\cdot\cos 60° = 60\times\frac{1}{2} = 30$

b) $\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} =$

$= \|\overrightarrow{AB}\|^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} =$

$= 100+30 = 130$

**3.** Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores e seja $\lambda$ um número real. Mostra que:

**a)** $\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v})-(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}=0$

**b)** $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=(\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|)(\|\vec{u}\|-\|\vec{v}\|)$

**c)** $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2(\vec{u}\cdot\vec{v})$

**d)** $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow \vec{u}\perp\vec{v}$

a) $\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v})-(\lambda\vec{u})\cdot\vec{v} = \lambda(\vec{u}\cdot\vec{v})-\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v}) = 0$

b) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = (\vec{u}\cdot\vec{u} - \cancel{\vec{u}\cdot\vec{v}} + \cancel{\vec{v}\cdot\vec{u}} - \vec{v}\cdot\vec{v})$

$= (\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) =$

$= (\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|)(\|\vec{u}\|-\|\vec{v}\|)$

c) $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = (\vec{u}\cdot\vec{u}) - (\vec{u}\cdot\vec{v}) - (\vec{v}\cdot\vec{u}) + (\vec{v}\cdot\vec{v})$

$= \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2(\vec{u}\cdot\vec{v})$

d) $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$

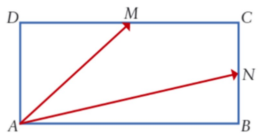
$\Leftrightarrow \quad \cancel{\|\vec{u}\|} + \cancel{\|\vec{v}\|^2} - 2(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \cancel{\|\vec{u}\|} + \cancel{\|\vec{v}\|} \Leftrightarrow$

Por c)

$\Leftrightarrow \quad -2(\vec{u}\cdot\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

**4.** Na figura está representado o retângulo $[ABCD]$.




Sabe-se que:

- $M$ é o ponto médio do lado $[DC]$;
- $N$ é o ponto médio do lado $[BC]$;
- $\overline{AC}=8$.

Determina o valor de $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$.

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN} = (\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}) =$

$= \underbrace{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}}_{0} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{BN}}_{0}$

$= 0 + \|\overrightarrow{AD}\|\cdot\|\overrightarrow{BN}\|\underbrace{\cos 0^\circ}_{1} + \|\overrightarrow{DM}\|\cdot\|\overrightarrow{AB}\|\underbrace{\cos 0^\circ}_{1} + 0$

$= \|\overrightarrow{AD}\| \times \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AD}\| + \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AB}\|$

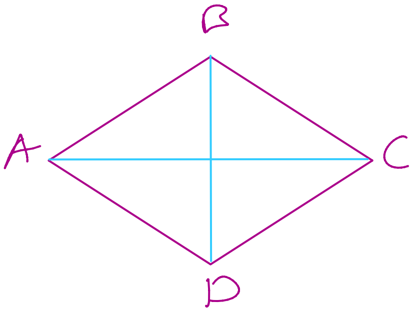
$= \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AD}\|^2 + \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|^2$

$= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AD}\|^2 + \|\overrightarrow{AB}\|^2\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AD}\|^2 + \|\overrightarrow{DC}\|^2\right)$

$= \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \frac{1}{2}\cdot 8^2 = 32$

**5.** Utilizando o produto escalar, prova que as diagonais de um losango são perpendiculares.
**Sugestão:** tem em conta que um losango é um paralelogramo com os lados todos iguais.




Mostrar que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$$

$$= \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{CD}$$

$$= \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}(-\overrightarrow{AB}) + \|\overrightarrow{BC}\|^2 + \overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{CD}$$

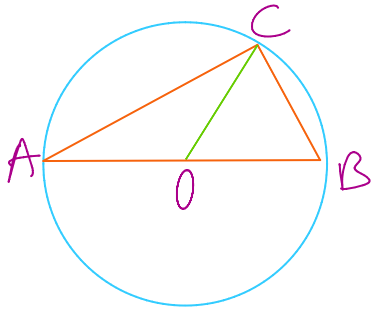
$$= \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC} \underbrace{- \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2}_{=0} + \overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{CD}$$

$$= \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{CD}$$

$$= \overrightarrow{BC}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{BC} \cdot \vec{0} = 0$$

c. q. m.

**6.** Utilizando o produto escalar, prova que um ângulo inscrito numa semicircunferência é reto.




Mostrar que ACB é reto, então $\vec{AC} \cdot \vec{CB} = 0$

$$\vec{AC} \cdot \vec{CB} = (\vec{AO} + \vec{OC})(\vec{CO} + \vec{OB})$$
$$= \vec{AO}\,\vec{CO} + \vec{AO}\,\vec{OB} + \vec{OC}\,\vec{CO} + \vec{OC}\,\vec{OB}$$
$$= \vec{AO}\,\vec{CO} + \vec{AO}\,\vec{AO} + \vec{OC}(-\vec{OC}) + \vec{OC}\,\vec{OB}$$
$$= \vec{AO}\,\vec{CO} + \underbrace{\|\vec{AO}\|^2 - \|\vec{OC}\|^2}_{=0} + \vec{OC}\,\vec{OB}$$
$$= \vec{AO}\,\vec{CO} + \vec{OC}\,\vec{OB}$$
$$= \vec{AO}\,\vec{CO} - \vec{CO}\,\vec{OB}$$
$$= \vec{CO}(\vec{AO} - \vec{OB}) = \vec{CO} \cdot \vec{0} = 0$$

c.q.m.

**7.** Em referencial o.n. $xOy$, sejam os vetores $\vec{u}(2, 3)$ e $\vec{v}(-1, 4)$. Determina:

**a)** $\vec{u} \cdot \vec{v}$ **b)** $\|\vec{u}\|$ e $\|\vec{v}\|$ **c)** $\cos(\vec{u}\,\hat{}\,\vec{v})$

**d)** $(\vec{u}\,\hat{}\,\vec{v})$ (em graus, arredondado às unidades)

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-1) + 3 \times 4 = -2 + 12 = 10$

b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$

c) $\cos(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \dfrac{10}{\sqrt{13}\sqrt{17}} = \dfrac{10}{\sqrt{221}}$

d) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \cos^{-1}\left(\dfrac{10}{\sqrt{221}}\right) \simeq 48^\circ$

**8.** Em referencial o.n. $xOy$, sejam os pontos $A(2,-1)$, $B(-1,3)$ e $C(2,4)$. Determina:

**a)** $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC})$

**b)** $A\hat{B}C$ (em graus, arredondado às unidades)

a) $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}) = \|\overrightarrow{AB}\|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} =$

$= \|\overrightarrow{BA}\|^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BA} = A - B = (2,-1) - (-1,3) = (3,-4)$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (2,4) - (-1,3) = (3,1)$

$\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \qquad \|\overrightarrow{BA}\|^2 = 25$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 3 \times 3 - 4 \times 1 = 5$

b) $A\hat{B}C$

$\cos(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}) = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\| \|\overrightarrow{BC}\|} = \dfrac{\cancel{5}}{\cancel{5} \times \sqrt{3^2 + 1^2}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$

$\cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right) \simeq 72^\circ$

**9.** Em referencial o.n. $xOy$, sejam os vetores $\vec{u}(2, \sqrt{3})$ e $\vec{v}(x-4, \sqrt{3}x)$, onde $x$ designa um número real. Determina $x$, de tal modo que:

**a)** $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$;
**b)** os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam perpendiculares;
**c)** os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sejam colineares;
**d)** $(\vec{u} \hat{\ } \vec{v}) = 60°$.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12 \Leftrightarrow 2x - 8 + 3x = 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x = 20 \Leftrightarrow x = 4$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 5x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{5}$

c) $\exists_{k \in \mathbb{R}}: \vec{v} = k\vec{u} \Leftrightarrow \exists_{k \in \mathbb{R}}: (x-4, \sqrt{3}x) = k(2, \sqrt{3})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 2k \\ \sqrt{3}x = \sqrt{3}k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 2x \\ x = k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2x = 4 \\ \_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ \_\_\_ \end{cases}$$

d) $(\vec{u} \hat{\ } \vec{v}) = 60° \Leftrightarrow \cos(\vec{u} \hat{\ } \vec{v}) = \cos 60° = \frac{1}{2}$

$$\cos(\vec{u} \hat{\ } \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|} = \frac{5x - 8}{\sqrt{4+3} \times \sqrt{(x-4)^2 + 3x^2}} =$$

$$= \frac{5x - 8}{\sqrt{7[(x-4)^2 + 3x^2]}}$$

$$\frac{5x - 8}{\sqrt{7[(x-4)^2 + 3x^2]}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 10x - 16 = \sqrt{7\left[(x-4)^2+3x^2\right]} \quad \wedge \; 7\left[(x-4)^2+x^2\right] \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 7\left[(x-4)^2+3x^2\right] = (10x-16)^2 \wedge 7\left[(x-4)^2+3x^2\right] > 0$$

$$\wedge \; 10x - 16 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7\left(x^2 - 8x + 16 + 3x^2\right) = 100x^2 - 320x + 256$$

$$\wedge 7(4x^2 - 8x + 16) > 0 \wedge x > \frac{8}{5}$$

$$\Leftrightarrow 28x^2 - 56x + 112 - 100x^2 + 320x - 256 = 0$$

$$\wedge \; 4x^2 - 8x + 16 > 0 \wedge x > \frac{8}{5}$$

$$\Leftrightarrow -72x^2 + 264x - 144 = 0 \wedge$$

$$\wedge \; x^2 - 2x + 4 > 0 \quad \wedge x > \frac{8}{5}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x^2 - 11x + 6 = 0 \wedge x^2 - 2x + 4 > 0 \quad \wedge x > \frac{8}{5}$$

$\Leftrightarrow \quad x = 3 \vee x = \frac{2}{3} \quad \wedge \quad$ EQ. Impossível $\wedge x > \frac{8}{5}$

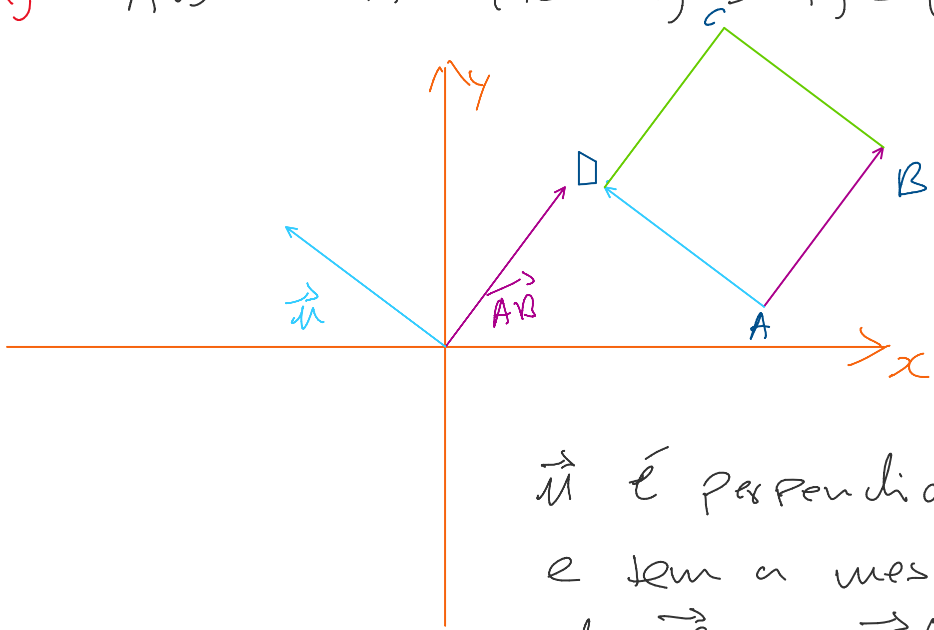
como $\left(x = 3 \vee x = \frac{2}{3}\right) \wedge x > \frac{8}{5} \Rightarrow x = 3$

**10.** Considera, em referencial o.n. $xOy$, os pontos $A(9, 1)$ e $B(12, 5)$.

**a)** O segmento de reta $[AB]$ é um dos lados de um quadrado $[ABCD]$, contido no primeiro quadrante. O segmento de reta $[BC]$ é outro lado desse quadrado. Determina as coordenadas dos pontos $C$ e $D$.

**b)** O segmento de reta $[AB]$ é um dos catetos de um triângulo retângulo $[ABE]$ de área 25, contido no primeiro quadrante. O segmento de reta $[BE]$ é a hipotenusa desse triângulo retângulo. Determina as coordenadas do ponto $E$.

a) $\overrightarrow{AB} = B - A = (12-9, 5-1) = (3, 4)$




$\vec{u}$ é perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ e tem a mesma norma de $\overrightarrow{AB}$. $\vec{u}(-4, 3)$

$C = B + \vec{u}$ $\qquad$ $D = A + \vec{u}$

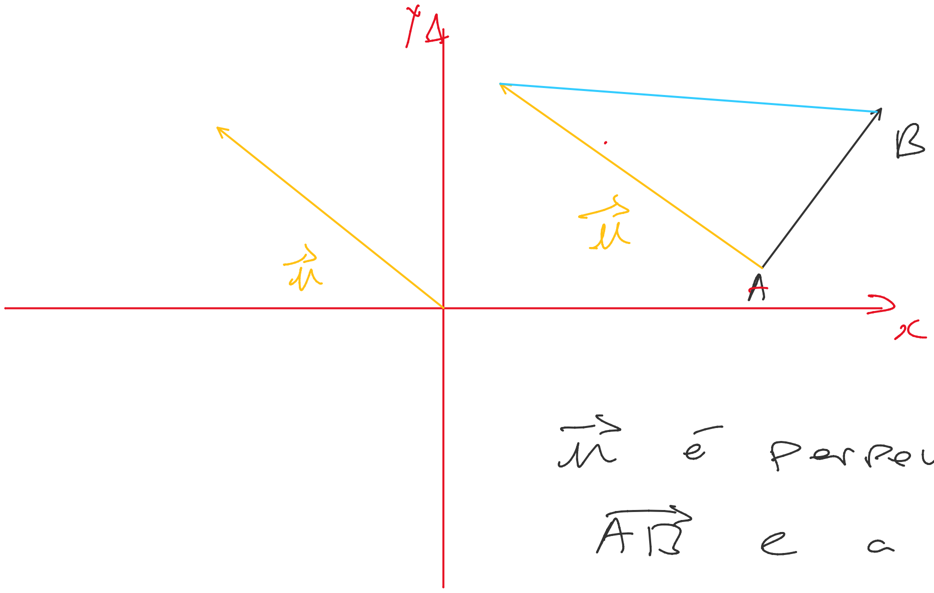
$C = (12, 5) + (-4, 3)$ $\qquad$ $D = (9, 1) + (-4, 3)$

$= (8, 8)$

b) $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

$\text{Área} = \dfrac{\|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AE}\|}{2} \Leftrightarrow 25 = \dfrac{5 \times \|\overrightarrow{AE}\|}{2}$

$\Leftrightarrow \|\overrightarrow{AE}\| = 10$




$\vec{u}$ é perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ e a norma é o dobro de $\overrightarrow{AB}$

$\vec{u} = 2(-4,3) = (-8,6)$

$E = A + \vec{u}$

$E = (9,1) + (-8,6) = (1,7)$

**11.** Considera, num plano munido de um referencial ortonormado, os pontos $A(-1, 3)$ e $B(5, 11)$.

Determina uma equação do lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ desse plano, tais que:

**a)** $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$ **b)** $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

a) $\overrightarrow{PA} = A - P = (-1, 3) - (x, y) = (-1-x, 3-y)$

$\overrightarrow{PB} = B - P = (5, 11) - (x, y) = (5-x, 11-y)$

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 \Leftrightarrow (-1-x)\times(5-x) + (3-y)(11-y) = 0$

$\Leftrightarrow -5 + x - 5x + x^2 + 33 - 3y - 11y + y^2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 - 14y + 28 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 14y + 49 = -28 + 4 + 49$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-14y+49=-28+4+49$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-7)^2=25$$

b) $\vec{PA}\cdot\vec{PB}=0$

$\vec{AB}=B-A=(5,11)-(-1,3)=(6,8)$

$$\vec{PA}\cdot\vec{PB}=0 \Leftrightarrow (-1-x)\times 6+(3-y)8=0$$
$$\Leftrightarrow -6-6x+24-8y=0$$
$$\Leftrightarrow -8y=6x-18$$
$$\Leftrightarrow y=-\frac{3}{4}x+\frac{9}{4}$$