



1. Identifique para cada uma das situações, o candidato vencedor por maioria simples e verifique se venceu também com maioria absoluta.

1.1.

Candidatos	A	B	C
N.º de votos	135	40	170

$$135 + 40 + 170 = 345$$

$$\frac{135}{345} \times 100 \approx 39,1 \quad ; \quad \frac{40}{345} \times 100 \approx 11,6 \quad ; \quad \frac{170}{345} \times 100 \approx 49,3$$

O candidato é o C e como não obteve mais de 50% dos votos, não venceu com maioria absoluta.

1.2.

Candidatos	A	B	C	D
N.º de votos	62	175	58	53

$$62 + 175 + 58 + 53 = 348$$

$$\frac{62}{348} \times 100 \approx 17,8 \quad ; \quad \frac{175}{348} \times 100 \approx 50,3 \quad ; \quad \frac{58}{348} \times 100 \approx 16,7 \quad ; \quad \frac{53}{348} \times 100 \approx 15,2$$

O vencedor foi o candidato B com maioria absoluta porque obteve mais de 50% dos votos.

2. Considere os seguintes resultados de um processo eleitoral cujo sistema é o de maioria absoluta.

Candidatos	A	B	C
N.º de votos	102	65	89

2.1. Justifique que é necessária segunda volta.

$\frac{102 + 65 + 89}{2} = 128$, é necessária segunda volta porque nenhum dos candidatos obteve mais de 128 votos.

2.2. Admita que 20% dos votos do candidato excluído na primeira volta transitam para o mais votado e os restantes para o outro candidato.

2.2.1. Qual seria o candidato vencedor?

O candidato excluído é o B.

$$65 \times 0,2 = 13, \text{ vão para o candidato A: } 102 + 13 = 115$$

$$65 \times 0,8 = 52, \text{ vão para o candidato C: } 89 + 52 = 141$$

O candidato vencedor é o C

2.2.2. O que pode concluir relativamente aos métodos eleitorais de maioria simples e de maioria absoluta nesta situação?

Se a eleição fosse pelo método de maioria simples o vencedor era o candidato A e pelo método de maioria absoluta o vencedor foi o candidato C. Portanto neste caso houve alteração de vencedor.

3. Numa escola realizou-se uma votação para selecionar o destino para a viagem de finalistas do 9.º ano, de entre três opções: S. Martinho do Porto, Setúbal e Albufeira. Apenas votaram uma parte dos 175 alunos finalistas, tendo-se registado 12% de abstenção. Sabe-se que 42 votos foram considerados não válidos.

3.1. Quantos foram os votos validamente expressos?

$$100\% - 12\% = 88\%$$

$$0,88 \times 175 = 154$$

$$154 - 42 = 112$$

3.2. Sabe-se que o número de votos nulos e de votos brancos estão na proporção 4 para 3. Determine a percentagem de votos brancos e de votos nulos, apresentando o resultado da ronda das unidades.

Como a proporção é de 4 para 3, então as partes são 7 no total.

$$\text{Assim, } \frac{4}{7} \times 42 = 24$$

Como $\frac{24}{154} \times 100 \approx 16\%$, então 16% dos votos foram nulos.

Logo, os votos em branco são $\frac{3}{7} \times 42 = 18$, e como $\frac{18}{154} \times 100 \approx 12\%$, então os votos em branco foram 12%

3.3. Quantos votos obteve o destino Albufeira, sabendo que $\frac{1}{4}$ dos votos validamente expressos recaíram sobre o destino São Martinho do Porto e 75% dos restantes que escolheram Setúbal?

$$\text{São Martinho do Porto: } \frac{1}{4} \times 112 = 28$$

$$\text{Setúbal: } 0,75 \times \underbrace{(112 - 28)}_{\text{restantes}} = 63$$

$$\text{Albufeira: } 112 - 28 - 63 = 21$$

3.4. O destino mais votado obteve maioria absoluta?

Sim, Setúbal porque $\frac{112}{2} = 56$ e Setúbal obteve $63 > 56$

4. Para escolher a Associação de Estudantes de uma escola, foi organizado um processo eleitoral em que os 920 alunos poderiam votar numa das 3 listas criadas para o efeito. Verificou-se uma taxa de abstenção de 25% e, de entre os votos efetuados, houve 50 considerados inválidos. Sabe-se, ainda, que a lista A recebeu $\frac{1}{4}$ dos votos validamente expressos e a lista B, $\frac{5}{3}$ dos votos da lista C.

- 4.1. Determine o número de votos que cada uma das listas obteve.

$$0,25 \times 920 = 230$$

$$920 - 230 = 690 \text{ votantes}$$

$$690 - 50 = 640 \text{ votantes validamente expressos}$$

Lista A:

$$\frac{1}{4} \times 640 = 160.$$

Lista C:

$$\text{Seja } x \text{ o número de votos da lista C, então: } \frac{5}{3}x + x + 160 = 640 \Leftrightarrow \frac{8}{3}x = 480 \Leftrightarrow x = 180$$

Lista B:

$$\frac{5}{3} \times 180 = 300$$

- 4.2. Identifique a lista vencedora e justifique que não ganhou com maioria absoluta.

A lista vencedora foi a B

$$\frac{640}{2} = 320 \text{ e } 300 < 320$$

- 4.3. Sabe-se que 48% dos votos inválidos foram votos brancos. Se os alunos que votaram em branco tivessem votado na lista com mais votos, esta venceria com maioria absoluta? Justifique.

Número de votos brancos:

$$0,48 \times 50 = 24$$

Número de votos válidos:

$$24 + 640 = 664$$

Número de votos na lista B:

$$300 + 24 = 324$$

Como $\frac{664}{2} = 332$ e $324 < 332$, logo a lista B não obteria a maioria absoluta

5. Aplica o método de Borda para apurar o vencedor de cada uma das votações em que existem 3 candidatos: A, B e C .

5.1.

Ordem de preferência	N.º de votos		
	7	5	9
1. ^a	C	A	B
2. ^a	A	C	A
3. ^a	B	B	C

Pontuação de A : $7 \times 2 + 5 \times 3 + 9 \times 2 = 47$

Pontuação de B : $7 \times 1 + 5 \times 1 + 9 \times 3 = 39$

Pontuação de C : $7 \times 3 + 5 \times 2 + 9 \times 1 = 40$

Vencedor A

5.2.

Ordem de preferência	N.º de votos			
	10	12	8	15
1. ^a	B	C	A	C
2. ^a	A	B	B	A
3. ^a	C	A	C	B

Pontuação de A : $10 \times 2 + 12 \times 1 + 8 \times 3 + 15 \times 2 = 86$

Pontuação de B : $10 \times 3 + 12 \times 2 + 8 \times 2 + 15 \times 1 = 85$

Pontuação de C : $10 \times 1 + 12 \times 3 + 8 \times 1 + 15 \times 3 = 99$

Vencedor C

6. O esquema circular ao lado representa o resultado de uma votação preferencial para o melhor jogador de uma equipa de futsal: A, B, C ou D .

As sequências estão indicadas por ordem decrescente de preferência: do centro para o exterior, estando as primeiras preferências no círculo menor.

6.1. Prova que o vencedor, pelo método de Borda, não é o jogador preferido dos votantes.

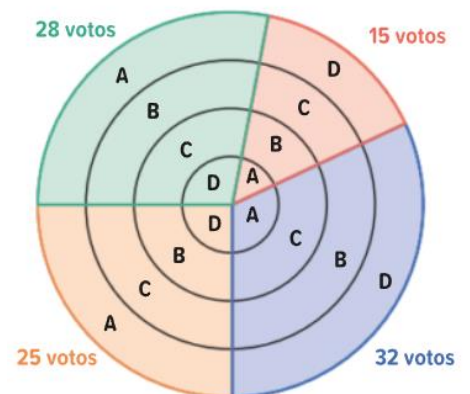
Pontuação de A : $28 \times 1 + 15 \times 4 + 32 \times 4 + 25 \times 1 = 241$

Pontuação de B : $28 \times 2 + 15 \times 3 + 32 \times 2 + 25 \times 3 = 240$

Pontuação de C : $28 \times 3 + 15 \times 2 + 32 \times 3 + 25 \times 2 = 260$

Pontuação de D : $28 \times 4 + 15 \times 1 + 32 \times 1 + 25 \times 4 = 259$

Vencedor C e não é o jogador preferido dos votantes.



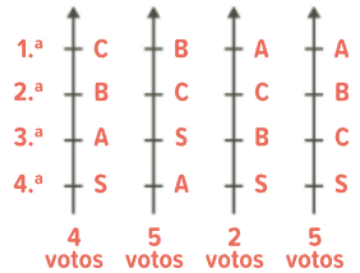
6.2. Se considerar apenas as primeiras preferências, qual é o vencedor por maioria simples?

Jogador A: $15 + 3247$

Jogador D: $28 + 25 = 53$

Vencedor, jogador D

7. Um grupo de 16 amigos pretende provar o famoso arroz de sarrabulho à moda de ponte de Lima, num dos seguintes restaurantes: Confrinha (C), Açudinho (A), Brasinhas (B) ou Sabores (S). Como havia diferentes opiniões, decidiram fazer uma votação preferencial. Os resultados foram os representados no esquema ao lado.



7.1. Utilizando o método de borda, qual foi o restaurante escolhido?

Restaurante A: $4 \times 2 + 5 \times 1 + 2 \times 4 + 5 \times 4 = 41$

Restaurante B: $4 \times 3 + 5 \times 4 + 2 \times 2 + 5 \times 3 = 51$

Restaurante C: $4 \times 4 + 5 \times 3 + 2 \times 3 + 5 \times 2 = 47$

Restaurante S: $4 \times 1 + 5 \times 2 + 2 \times 1 + 5 \times 1 = 21$

O restaurante escolhido foi o Brasinhas

7.2. Se considerar apenas as primeiras preferências, o restaurante mais votado obteve maioria absoluta? Justifique.

Considerando apenas as primeiras preferências, o restaurante mais votado é o Açudinho, com sete votos. Não obteve maioria absoluta porque $\frac{16}{2} = 8$ e $7 < 8$.

8. A Beatriz (B), a Luana (L) e o Valentim (V) participaram no concurso para eleger a melhor máscara na festa de Carnaval da aldeia onde residem. Cada uma das pessoas que constituem a equipa organizadora da festa votaram, colocando os 3 finalistas por ordem de preferência. Os resultados foram os apresentados na tabela.

Ordem de preferência	N.º de votos			
	5	6	9	?
1.ª	B	V	L	B
2.ª	V	L	V	L
3.ª	L	B	B	V

8.1. Sabendo que a Luana foi a vencedora, pelo método de borda, obtendo uma pontuação de 54 pontos, determine o número de pessoas que votaram BLV.

Seja x o número de pessoas que votaram BLV.

$$5 \times 1 + 6 \times 2 + 9 \times 3 + x \times 2 = 54 \Leftrightarrow 2x = 54 - 44 \Leftrightarrow x = 5$$

Portanto 5 pessoas votaram BLV

8.2. Se o método utilizado fosse o da maioria simples qual seria o vencedor? E por maioria absoluta com duas voltas?

Primeiras preferências:

Beatriz: $5 + 5 = 10$

Luana: 9

Valentim: 6

A duas mais votadas são a Beatriz e a Luana, se excluirmos nas primeiras preferências o Valentim a tabela fica:

Ordem de preferência	N.º de votos			
	5	6	9	5
1.ª	B	L	L	B
2.ª	L	B	B	L

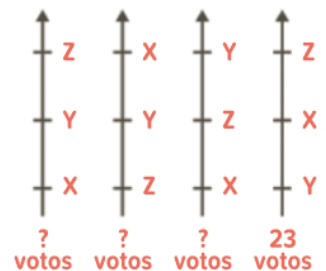
Logo, Beatriz, $5 + 5 = 10$ e Luana, $6 + 9 = 15$

A Luana seria a vencedora por maioria absoluta.

9. Foi realizada uma votação com três candidatos (X, Y e Z) usando boletins de preferência. Obtiveram-se os resultados indicados no esquema ao lado.

Sabe-se que:

- o número de pessoas que votaram XYZ foi a terça parte do número de pessoas que votaram ZYX ;
- o número de pessoas que votaram YZX foi o dobro do número de pessoas que votaram XYZ ;
- ao aplicar o método de Borda, o candidato Y obteve 149 pontos.



Determine os valores em falta no esquema apresentado.

Seja x o número de pessoas que votaram ZYX

$$x \times 2 + \frac{1}{3}x \times 2 + 2\left(\frac{1}{3}x\right) \times 3 + 23 \times 1 = 149 \Leftrightarrow 6x + 2x + 6x + 69 = 447 \Leftrightarrow 14x = 378 \Leftrightarrow x = 27$$

Logo, 27 pessoas votaram ZYX , 9 pessoas votaram XYZ e 18 votaram YZX .

10. Nas eleições autárquicas de 2021 para eleger a Assembleia de Freguesia de Vale de São Martinho, no concelho de Vila Nova de Famalicão, Distrito de Braga, obtiveram-se os seguintes votos, nos partidos/coligações concorrentes.

Partidos	N.º de votos	N.º de inscritos: 1831 N.º de votos brancos: 20 N.º de votos nulos: 16
PPD/PSD.CDS-PP	625	
PS	477	
PCP-PEV	31	

Fonte: Área Eleitoral da Secretaria-Geral do Ministério da Administração Interna

10.1. Determine, arredondada às unidades, percentagem de:

a) abstenção;

$$\text{Número de votantes: } \underbrace{625 + 477 + 31}_{\text{Votos validamente expressos}} + \underbrace{20 + 16}_{\text{Não são validamente expressos mas contam como votantes}} = 1169$$

$$1831 - 1169 = 662$$

$$\text{Assim, } \frac{662}{1831} \times 100 \approx 36$$

Abstenção é de 36%

b) votos não validamente expressos.

$$20 + 16 = 36$$

$$\frac{36}{1169} \times 100 \approx 3$$

10.2. Sabendo que havia nove mandatos para atribuir na referida Assembleia de Freguesia, aplique o método de Hondt para determinar o número de mandatos atribuídos a cada partido concorrente.

Divisores	PPD/PSD.CDS-PP	PS	PCP-PEV
1	625 ¹	447 ²	31
2	$\frac{625}{2} = 312,5$ ³	$\frac{477}{2} = 238,5$ ⁴	$\frac{31}{2} = 15,5$
3	$\frac{625}{3} = 208,3$ ⁵	$\frac{477}{3} = 159$ ⁶	$\frac{31}{3} = 10,3$
4	$\frac{625}{4} = 156,3$ ⁷	$\frac{477}{4} = 119,3$ ⁹	$\frac{31}{4} = 7,8$
5	$\frac{625}{5} = 125$ ⁸	$\frac{477}{5} = 95,4$	$\frac{31}{5} = 6,2$

A coligação PPD/PSD.CD-PP obteve 5 mandatos o PS 4 mandatos e a coligação PCP-PEV não obteve mandatos.

10.3. Qual é o número mínimo de votos que faltaram ao partido PCP-PEV para que este tivesse obtido um mandato? Justifique.

O quociente teria que ser superior a 119,3, então, $119,3 - 31 = 88,3$

Logo, faltariam, no mínimo, 89 votos para que o PCP-PEV tivesse um mandato.

10.4. se os eleitores correspondentes aos votos nulos ou brancos votassem no partido PCP-PEV, este conseguiria algum mandato? Justifique.

Não, pois $31 + 36 = 67$ que é inferior a 119,3 (valor do último mandato)

10.5. Complete a seguinte tabela e compare as percentagens de votos válidos e de mandatos de cada partido. O que observa?

Partidos	N.º de votos	Percentagem de votos válidos	N.º de mandatos	Percentagem de mandatos
PPD/PSD.CDS-PP	625	$\frac{662}{1133} \times 100 \approx 58,5$, ou seja, 58,5%	5	$\frac{5}{9} \times 100 \approx 55,6$, ou seja, 55,6%
PS	477	$\frac{477}{1133} \times 100 \approx 42,1$, ou seja, 42,1%	4	$\frac{4}{9} \times 100 \approx 44,4$, ou seja, 44,4%
PCP-PEV	31	$\frac{31}{1133} \times 100 \approx 2,7$, ou seja, 2,7%	0	$\frac{0}{9} \times 100 \approx 0$, ou seja, 0%

As percentagens de mandatos dos partidos PPD/PSD.CDS-PP e PS é superior à percentagem de votos válidos. A percentagem de mandatos da coligação PCP-PEV é nula, sendo inferior à percentagem de votos válidos.

11. Uma empresa tem 4 fábricas em diferentes localidades do país: Vila Nova de Famalicão (F), Guimarães (G), Aveiro (A) e Lisboa (L). Como a empresa está a envolver-se em mais projetos, a direção decidiu contratar sete novos funcionários para reforçar o grupo de trabalhadores da empresa, proporcionalmente ao número de funcionários de cada fábrica. Os funcionários estão distribuídos pelas quatro fábricas da seguinte forma:

Fábricas	F	G	A	L
N.º de funcionários	450	225	550	722

11.1. Usando o método de Hondt, determine quantos novos funcionários deverão ser atribuídos a cada uma das fábricas.

Divisores	F	G	A	L
1	$\frac{450}{1}$	$\frac{225}{1}$	$\frac{550}{1}$	$\frac{722}{1}$
2	225	112,5	$\frac{275}{2}$	$\frac{361}{2}$
3	150	75	183,3	$\frac{240,7}{3}$

Vila Nova de Famalicão: 1 funcionário

Guimarães: 1 funcionário

Aveiro: 2 funcionários

Lisboa: 3 funcionários

11.2. Explique como procedeu para atribuir o último funcionário na alínea anterior

Como havia um empate, os quocientes F e G eram iguais, então o último funcionário foi atribuído à fábrica com menos trabalhadores.

12. em determinadas eleições, em relação às quais há 6 mandatos para distribuir, candidataram-se 3 partidos políticos. Registou-se 20% de abstenção e os resultados eleitorais foram os seguintes:

Partidos	X	Y	Z	N.º de votos nulos: 235 N.º de votos brancos: 173
N.º de votos	7238	?	1672	

12.1. Sabe-se que o partido Z não teve direito a mandato. Determine o número de mínimo de votos do partido Y .

Metade de votos do partido Y tem de ser superior a 1672. Assim o número de votos tem de ser superior a 3344.

Portanto, o partido Y teve no mínimo 3345 votos.

12.2. Sabe-se que o partido Y obteve 3402 votos. Se os abstencionistas tivessem votado no partido menos votado, a distribuição dos mandatos seria alterada?

Número de votantes: $7238 + 3402 + 1672 + 235 + 173 = 12720$

Número de abstencionistas: $\frac{0,2 \times 12720}{0,8} = 3180$

Número de votos em Z : $1672 + 3180 = 4852$

Divisores	X	Y	Z
1	$\textcircled{7238}^1$	$\textcircled{3402}^4$	$\textcircled{4852}^2$
2	$\textcircled{3619}^3$	1701	$\textcircled{2426}^5$
3	$\textcircled{2412,7}^6$	1134	1617,3

A distribuição de mandatos seria alterada para:

Partido X : 3 mandatos;

Partido Y : 1 mandato;

Partido Z : 2 mandatos.

13. Nas eleições autárquicas de 2021, para eleger os representantes da Assembleia de Freguesia de Roriz, no concelho de Santo Tirso, distrito do Porto, obtiveram-se os seguintes votos NOS partidos coligações concorrentes:

Partidos	PS	PPD/PSD.CDS-PP	PCP-PEV	N.º de inscritos: 3160
N.º de votos	1109	563	227	N.º de votos brancos: 46 N.º de votos nulos: 27

Fonte: Área Eleitoral da Secretaria-Geral do Ministério da Administração Interna

- 13.1. Sabendo que havia nove mandatos para atribuir na referida Assembleia de Freguesia, determine o número de mandatos atribuídos a cada partido concorrente por aplicação do:

- a) método de Hondt;

Divisores	PS	PPD/PSD.CDS-PP	PCP-PEV
1	1109 ¹	563 ²	227 ⁷
2	554,5 ³	281,5 ⁵	113,5
3	369,7 ⁴	187,7 ⁹	75,7
4	277,3 ⁶	140,8	56,8
5	221,8 ⁸	112,6	45,4

PS: 5 mandatos

PPD/PSD.CDS-PP: 3 mandatos

PCP-PEV: 1 mandato

- b) método de St. Laguë.

Divisores	PS	PPD/PSD.CDS-PP	PCP-PEV
1	1109 ¹	563 ²	227 ⁴
3	369,7 ³	187,7 ⁶	75,7
5	221,8 ⁵	112,6 ⁹	45,4
7	158,4 ⁷	80,4	56,8
9	123,2 ⁹	62,6	25,2

PS: 5 mandatos

PPD/PSD.CDS-PP: 3 mandatos

PCP-PEV: 1 mandato

- 13.2. O que observa na aplicação dos dois métodos?

Podemos observar que os partidos/coligações obtêm o mesmo número de mandatos por aplicação dos dois métodos.

Observa-se ainda que a ordem pela qual foram atribuídos os nove mandatos foi diferente.

13.3. Se a terça parte dos abstencionistas tivessem votado no partido/coligação menos votado, o número de mandatos de cada partido/coligação concorrente iria alterar por aplicação do método de St. Laguë? Justifique.

Número de abstencionistas:

$$3160 - (1109 + 563 + 227 + 46 + 27) = 1188$$

$$\frac{1}{3} \times 1188 = 396$$

$$227 + 396 = 623$$

Divisores	PS	PPD/PSD.CDS-PP	PCP-PEV
1	1109 ¹	563 ³	623 ²
3	369,7 ⁴	187,7 ⁷	207,6 ⁶
5	221,8 ⁵	112,6	124,6 ⁹
7	158,4 ⁸	80,4	89
9	123,2	62,6	69,2

Sim.

PS: 4 mandatos;

PPD/PSD.CDS-PP: 2 mandatos;

PCP-PEV: 3 mandatos

14. Observe os resultados de uma eleição aos quais se aplicou o método de St. Laguë para distribuir sete mandatos. Contudo, a tabela encontra-se incompleta. Sabe-se que o partido Z foi o menos votado. Indique o número mínimo de votos que terá obtido sabendo que conseguiu um mandato.

Partidos	X	Y	Z
N.º de votos	12 570	8 415	?

Divisores	X	Y	Z
1	12 570	8 415	1 683
3	4 190	2 805	
5	2 514	1 683	
7	1 795,7	1 202,1	
	1 396,7	935	

O número mínimo de votos para o partido Z é 1683

15. Um grupo de 8 alunos das escolas A, B, C e D De um agrupamento serão selecionados para representá-lo no Parlamento dos jovens. Determine o número de alunos a selecionar em cada escola para fazer parte do grupo por aplicação dos métodos de Hondt e de St. Laguë. Que diferenças verifica em relação aos resultados obtidos por aplicação dos dois métodos?

Escolas	A	B	C	D
N.º de alunos	1230	1010	930	800

Método de Hondt

Divisores	A	B	C	D
1	1230	1010	930	800
2	615	505	465	400
3	410	336,7	310	266,7

A: 3 alunos; B: 2 alunos; C: 2 alunos; D: 1 aluno

Método de St. Laguë:

Divisores	A	B	C	D
1	1230	1010	930	800
3	410	336,7	310	266,7
5	246	202	186	160

A: 2 alunos; B: 2 alunos; C: 2 alunos; D: 2 alunos

O Método de St. Laguë favorece a escola com menos alunos, comparativamente com o método de Hondt.

16. Num processo eleitoral concorreram os partidos A, B, C e D. Sabe-se que havia 4000 eleitores inscritos e registou se 19% de abstenção. Os resultados eleitorais foram:

Partidos	A	B	C	D	N.º de votos brancos: 187 N.º de votos nulos: 101
N.º de votos	1235	953	?	354	

- 16.1. Determine o número de votantes, o número de eleitores que não participaram no ato eleitoral e o número de votos obtidos pelo partido C.

Número de eleitores que não participam no ato eleitoral:

$$0,19 \times 4000 = 760$$

Número de votantes:

$$4000 - 760 = 3240$$

Número de votos do partido C:

$$3240 - 1235 - 953 - 354 - 187 - 101 = 410$$

16.2. Aplique o método de St. Laguë Para distribuir 7 mandatos pelos partidos candidatos. Indica o número de representantes que terá cada um dos partidos.

Divisores	A	B	C	D
1	(1235)	(953)	(410)	(354)
3	(411,7)	(317,7)	136,7	118
5	(247)	190,6	82	70,8

A: 3 mandatos

B: 2 mandatos

C: 1 mandato

D: 1 mandato