1. Indique o valor lógico das seguintes afirmações e corrija as falsas:

1.1. O incentro é o centro da única circunferência circunscrita ao triângulo.

Falsa. O incentro é o centro da única circunferência inscrita no triângulo.

1.2. A distância do incentro a cada um dos lados do triângulo é o dobro do raio da circunferência inscrita no triângulo.

Falsa. A distância do incentro a cada um dos lados do triângulo é o raio da circunferência inscrita no triângulo.

1.3. O circuncentro pode não pertencer ao triângulo.

Verdadeira.

1.4. A distância do baricentro a qualquer dos pontos médios dos lados do triângulo é $\frac{2}{3}$ do comprimento da mediana respetiva.

Falsa. A distância do baricentro a qualquer um dos vértices do triângulo é $\frac{2}{3}$ do comprimento da mediana respetiva.

1.5. As três medianas de um triângulo dividem-no em seis triângulos com igual área.

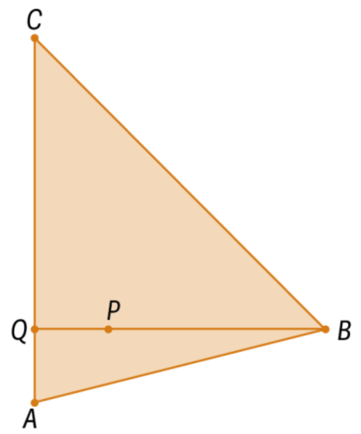
Verdadeira.

2. Considerando um triângulo e os seus quatro pontos notáveis, estabeleça uma correspondência entre cada um desses pontos e as suas características apresentadas no seguinte esquema.

- Baricentro
- Incentro
- Ortocentro
- Circuncentro

- Centro da circunferência circunscrita ao triângulo.
- A sua distância a qualquer um dos vértices do triângulo é $\frac{2}{3}$ da respetiva mediana.
- Centro da circunferência inscrita no triângulo.
- Encontra-se a igual distância dos vértices do triângulo.
- Ponto de interseção das medianas do triângulo.
- Centro da circunferência tangente aos lados do triângulo.
- Encontra-se a igual distância dos lados do triângulo.
- Ponto de interseção das retas suporte das alturas do triângulo.
- Ponto de interseção das bissetrizes do triângulo.
- Ponto de interseção das mediatrizes do triângulo.

3. Na figura seguinte encontra-se representado um triângulo [*ABC*], um ponto notável do triângulo, *P*, pertencente à reta *BQ* e o ponto *Q* que é o pé da perpendicular à reta suporte do lado [*AC*] que passa pelo vértice.



Sabe-se que:

- $\overline{AQ} = 1$;
- $\overline{BQ} = \overline{CQ}$;
- $\overline{BC} = 4\sqrt{2}$.

3.1. Como se designa o ponto *P*.

P é o ortocentro do triângulo.

3.2. Determine a área e o perímetro do triângulo [*ABC*].

$$\overline{BC}^2 = \overline{BQ}^2 + \overline{CQ}^2 \Leftrightarrow \left(4\sqrt{2}\right)^2 = \overline{BQ}^2 + \overline{BQ}^2 \Leftrightarrow 2\overline{BQ}^2 = 32 \Leftrightarrow \overline{BQ}^2 = 16 \underset{\overline{BQ}>0}{\Leftrightarrow} \overline{BQ} = 4$$

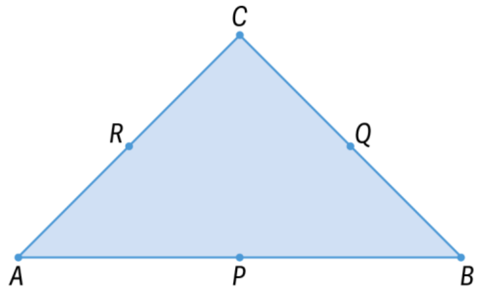
$$\overline{AC} = \overline{AQ} + \overline{CQ} = 1 + 4 = 5$$

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BQ}^2 \Leftrightarrow \overline{AB}^2 = 1 + 16 \underset{\overline{AB}>0}{\Leftrightarrow} \overline{AB} = \sqrt{17}$$

$$P_{[ABC]} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = \sqrt{17} + 5 + 4\sqrt{2}$$

4. Na figura está representado o triângulo isósceles [*ABC*], assim como os pontos médios dos seus lados.



Sabe-se que:

- $\overline{AC} = \overline{BC}$;
- $\overline{CP} = 5{,}7$ cm;
- $\overline{AQ} = 7{,}2$ cm;
- o ponto S, não representado na figura, é o baricentro do triângulo [*ABC*].

Determine:

4.1. $\overline{AS}$

$$\overline{AS} = \frac{2}{3}\overline{AQ} = \frac{2}{3} \times 7{,}2 = 4{,}8 \text{ cm}$$

4.2. $\overline{RS}$

$$\overline{RS} = \overline{SQ} = 7{,}2 - 4{,}8 = 2{,}4 \text{ cm}$$

4.3. $\overline{PB}$, com aproximação às centésimas

$$\overline{PS}=\frac{1}{3}\overline{CP}=\frac{1}{3}\times 5{,}7=1{,}9\text{ cm}$$

$$\overline{AS}^2=\overline{PS}^2+\overline{AP}^2 \Leftrightarrow \overline{AP}^2=4{,}8^2-1{,}9^2 \Leftrightarrow \overline{AP}^2=19{,}43 \underset{\overline{AP}>0}{\Leftrightarrow} \overline{AP}=\sqrt{19{,}43}$$

$$\therefore\ \overline{PB}=\overline{AP}\approx 4{,}41\text{ cm}$$

4.4. A área do triângulo $[BCS]$, com aproximação às décimas.

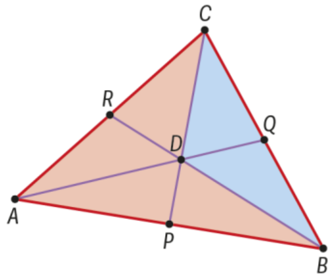
$$A_{[PBS]}=\frac{\overline{PB}\times\overline{PS}}{2}=\frac{4{,}41\times 1{,}9}{2}=4{,}1895\text{ cm}^2$$

$$A_{[BCS]}=2A_{[PBS]}=2\times 4{,}1895\approx 8{,}4\text{ cm}^2$$

5. Considere um triângulo $[ABC]$ de área 30 cm² e seja D o seu baricentro.

5.1. Explique como procederia para dividir o triângulo em dois polígonos em que a área de um deles fosse o dobro da área do outro.

Desenhava as medianas do triângulo como se exemplifica na figura, porque estas dividem o triângulo em 6 triângulos com a mesma área. Seguidamente consideraria, por exemplo, os polígonos $[BDC]$ e $[ABCD]$.



$$A_{[BDC]}=2\times\frac{1}{6}A_{[ABC]}=\frac{1}{3}A_{[ABC]}$$

$$A_{[ABCD]}=4\times\frac{1}{6}A_{[ABC]}=\frac{2}{3}A_{[ABC]}$$

$$\therefore\ A_{[ABCD]}=2A_{[BDC]}$$

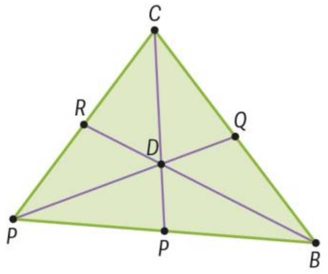
5.2. Determine a área do triângulo $[ADC]$.

$$A_{[ADC]}=2\times\frac{1}{6}A_{[ABC]}=\frac{1}{3}\times 30=10\ \text{ cm}^2$$

5.3. Admita agora que, relativamente a um referencial o. n. do plano, cuja unidade é o centímetro, os vértices do triângulo $[ABC]$ têm coordenadas $(-4,-1),(6,-1)$ e $(0,5)$ respetivamente.

Determine:

5.3.1. as equações reduzidas das retas-suporte das medianas do triângulo;



Sejam P, Q e R os pontos médios de $[AB]$, $[BC]$ e $[AC]$, respetivamente.

Reta-suporte da mediana $[CP]$:

$$P\left(\frac{-4+6}{2},\frac{-1-1}{2}\right)=(1,-1) \text{ e } C\ (0,5)$$

ordenada na origem

$$m_{CP}=\frac{-1-5}{1-0}=-6$$

$$CP:\ y=-6x+5$$

Reta-suporte da mediana $[AQ]$:

$$Q\left(\frac{6+0}{2},\frac{-1+5}{2}\right)=(3,2) \text{ e } A(-4,-1)$$

$$m_{AQ}=\frac{2+1}{3+4}=\frac{3}{7}\text{, então, } y=\frac{3}{7}x+b$$

$$A(-4,-1)\Rightarrow -1=\frac{3}{7}\times(-4)+b \Leftrightarrow b=-1+\frac{12}{7}\Leftrightarrow b=\frac{5}{7}$$

$$AQ:\ y=\frac{3}{7}x+\frac{5}{7}$$

Reta-suporte da mediana $[BR]$:

$$R\left(\frac{-4+0}{2},\frac{-1+5}{2}\right)=(-2,2) \text{ e } B(6,-1)$$

$$m_{BR}=\frac{2+1}{-2-6}=-\frac{3}{8}\text{, então, } y=-\frac{3}{8}x+b$$

$$A(-2,2)\Rightarrow 2=-\frac{3}{8}\times(-2)+b \Leftrightarrow b=2-\frac{3}{4}\Leftrightarrow b=\frac{5}{4}$$

$$BR:\ y=-\frac{3}{8}x+\frac{5}{4}$$

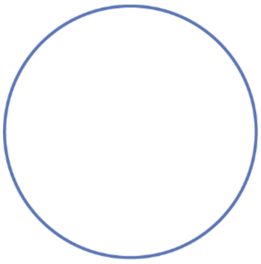
5.3.2. as coordenadas do ponto D.

$$\begin{cases} y=-6x+5 \\ y=-\frac{3}{8}x+\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ -6x+5=-\frac{3}{8}x+\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ -48x+40=-3x+10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ -45x=-30 \end{cases} \Leftrightarrow$$

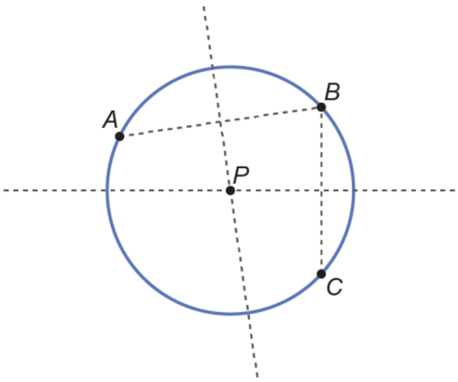
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ x=\frac{30}{45} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-6\times\frac{2}{3}+5 \\ x=\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$D\left(\frac{2}{3},1\right)$$

6. Na figura está desenhada da qual se desconhece o centro.
Faça as construções necessárias que lhe permita obter o centro da circunferência.

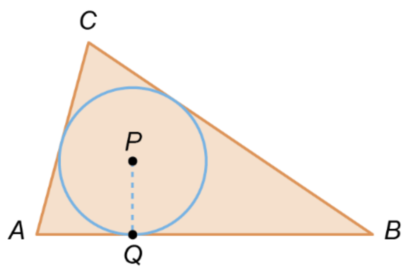


Marcamos três pontos, A, B e C, na circunferência e determinamos a mediatriz de dois dos segmentos de reta por eles determinados. Obtemos, assim, na interseção das mediatrizes, o centro da circunferência (circuncentro do triângulo $[ABC]$).



7. Na figura está representado um triângulo $[ABC]$ e a circunferência inscrita nesse triângulo.
Sabe-se que:

- o ponto Q pertence ao lado $[AB]$;
- $[PQ]$ é um raio da circunferência inscrita nesse triângulo;
- a circunferência inscrita no triângulo tem 6π cm de comprimento;
- o triângulo tem 24 cm² de área.



Determine o perímetro do triângulo $[ABC]$.

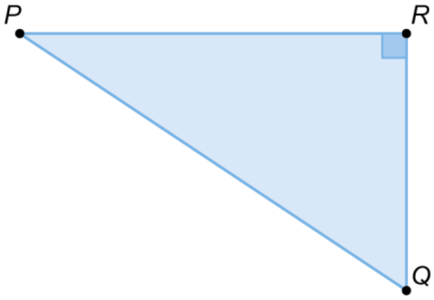
Sabe-se que o perímetro da circunferência inscrita no triângulo é igual a 6π cm, de onde se conclui que o seu raio mede 3 cm.

$$A_{[ABC]} = A_{[ABP]} + A_{[BCP]} + A_{[CAP]} \Leftrightarrow 24 = \frac{\overline{AB}\times 3}{2} + \frac{\overline{BC}\times 3}{2} + \frac{\overline{AC}\times 3}{2} \Leftrightarrow 24 = \frac{\left(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}\right)\times 3}{2} \Leftrightarrow$$

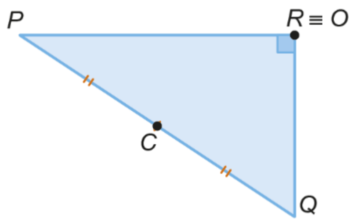
$$\Leftrightarrow 24 = \frac{P\times 3}{2} \Leftrightarrow P = 16$$

O perímetro do triângulo é igual a 16 cm.

8. Relativamente a um triângulo retângulo $[PQR]$ representado na figura, sabe-se que $\overline{QR} = 8$ cm e $\overline{PR} = 12$ cm .



8.1. Identifique os pontos que representam o ortocentro e o circuncentro do triângulo.
Represente-os na figura por O e C , respetivamente.
O ortocentro coincide com o vértice R e o circuncentro é o ponto médio de $[PQ]$.



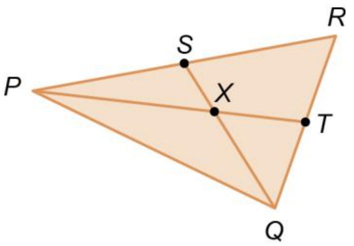
8.2. Determine, em centímetros, a medida de $\overline{OC}$

Uma vez que o ortocentro coincide com o vértice R e o circuncentro é o ponto médio de $[PQ]$, sendo esse ponto, por definição, equidistante dos três vértices do triângulo, podemos concluir que $\overline{OC} = \frac{\overline{PQ}}{2}$.

$$\overline{PQ}^2 = 8^2 + 12^2 \Leftrightarrow \overline{PQ}^2 = 208 \underset{\overline{PQ}>0}{\Leftrightarrow} \overline{PQ} = \sqrt{208} \Leftrightarrow \overline{PQ} = 4\sqrt{13}$$

$$\therefore \ \overline{OC} = \frac{\overline{PQ}}{2} = \frac{4\sqrt{13}}{2} = 2\sqrt{13}$$

9. Na figura está representado um triângulo, $[PQR]$, sendo $[ST]$ e $[PT]$ duas das suas medianas.



9.1. O que representa X?

(A) O circuncentro (B) O baricentro
(C) O ortocentro (D) O incentro

X é o centro de interseção das medianas do triângulo $[PQR]$, logo é o baricentro.

OPÇÃO: B

9.2. Sabendo que o triângulo $[PXS]$ tem 4 cm² de área, determine a área do triângulo $[PQR]$.

$$A_{[PQR]} = 6 \times A_{[PXS]} = 24 \text{ cm}^2$$

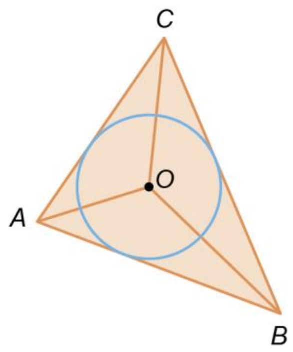
10. Num triângulo, $[PQR]$, retângulo em P, o ortocentro situa-se:

(A) na hipotenusa
(B) no interior do triângulo
(C) no exterior do triângulo
(D) no ponto P

Num triângulo retângulo, o ortocentro (ponto de interseção das retas suportes das alturas desse triângulo) encontra-se no vértice do ângulo reto.

OPÇÃO: D

11. Na figura está representada uma circunferência de centro O inscrita no triângulo $[ABC]$.



Sabe-se que:

- $B\hat{A}O = 35^{\circ}$
- $C\hat{B}A = 52^{\circ}$

Qual é a amplitude do ângulo BOC?

(A) 120°
(B) 125°
(C) 130°
(D) 135°

$B\hat{A}C = 2 \times B\hat{A}O = 2 \times 35^{\circ} = 70^{\circ}$

$C\hat{B}O = \dfrac{C\hat{B}A}{2} = \dfrac{52^{\circ}}{2} = 26^{\circ}$

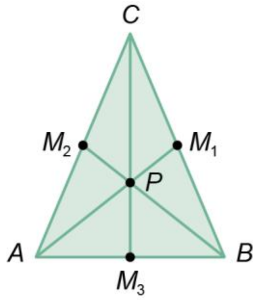
$A\hat{C}B = 180^{\circ} - (70^{\circ} + 52^{\circ}) = 58^{\circ}$

$O\hat{C}B = \dfrac{58^{\circ}}{2} = 29^{\circ}$

$B\hat{O}C = 180^{\circ} - (26^{\circ} + 29^{\circ}) = 125^{\circ}$

OPÇÃO: B

12. Na figura está representado um triângulo, $[ABC]$, e as suas medianas, $[AM_1]$, $[BM_2]$ e $[CM_3]$.



Sabe-se que:

- $\overline{AC} = \overline{BC}$;
- P é o ponto de interseção das medianas;
- $\overline{CP} = 6$ cm e $\overline{CM_3} = 4$ cm

12.1. Determine a área do triângulo $[ABC]$.

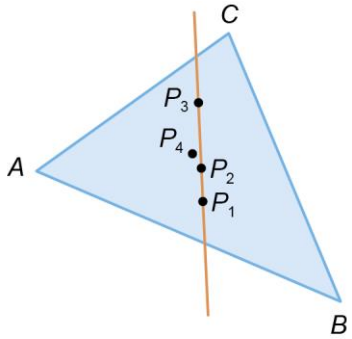
$$\overline{PM_3} = \frac{\overline{CP}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{CM_3}}{2} = \frac{2\overline{BM_3} \times \left(\overline{CP} + \overline{PM_3}\right)}{2} = \frac{2 \times 4 \times (6+3)}{2} = 36$$

12.2. Indique o valor da razão entre as áreas do quadrilátero $[CM_2PM_1]$ e do triângulo $[ABC]$.

A área do quadrilátero $[CM_2PM_1]$ é igual a $\frac{1}{3}$ da área do triângulo $[ABC]$.

13. Na figura está representado um triângulo, $[ABC]$, os seus quatro pontos notáveis e a reta de Euler.



Qual dos pontos notáveis é equidistante dos três lados do triângulo?

(A) P_1 (B) P_2 (C) P_3 (D) P_4

P_4 é o ponto que representa o incentro, uma vez que esse é o único ponto notável que pode não pertencer à reta de Euler.

OPÇÃO: D

14. Determine o comprimento da circunferência dos nove pontos, sabendo que a área do círculo limitado pela circunferência circunscrita ao triângulo é igual a 64π cm^2.

$$\pi r^2 = 64\pi \Leftrightarrow r^2 = 64 \underset{r>0}{\Leftrightarrow} r = 8$$

O raio da circunferência circunscrita é 8 cm. Sabemos, então, que o raio da circunferência dos nove pontos é igual a 4 cm (a metade de 8 cm).

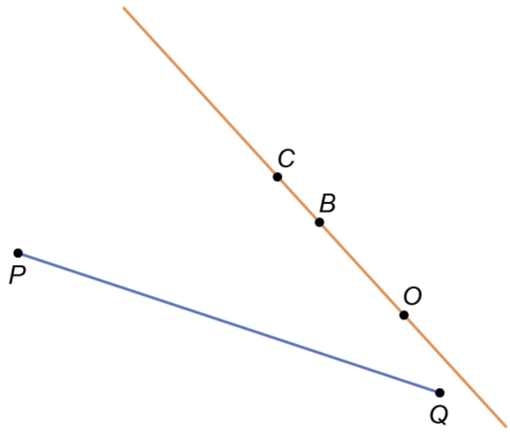
$2\pi \times 4 = 8\pi$

Assim, o comprimento da circunferência dos nove pontos será 8π cm.

15. Na figura está representado o segmento de reta $[PQ]$, que é um dos lados de um triângulo $[PQR]$ (o ponto R não se encontra representado na figura).

Está também representada a reta de Euler e, nela, foram assinalados o circuncentro, C, o baricentro, B, e o ortocentro, O, desse triângulo.

Sabe-se que $\overline{BC} = 1{,}4$ cm .



15.1. Determine $\overline{CO}$.

Sabe-se que $\overline{BC} = 1,4$ cm

$\overline{CO} = 3\overline{BC} = 3 \times 1,4 = 4,2$ cm

15.2. Determine a distância de B ao centro da circunferência dos nove pontos.

Seja N o centro da circunferência dos nove pontos. Sabemos que N é o ponto médio de $[OC]$. Assim:

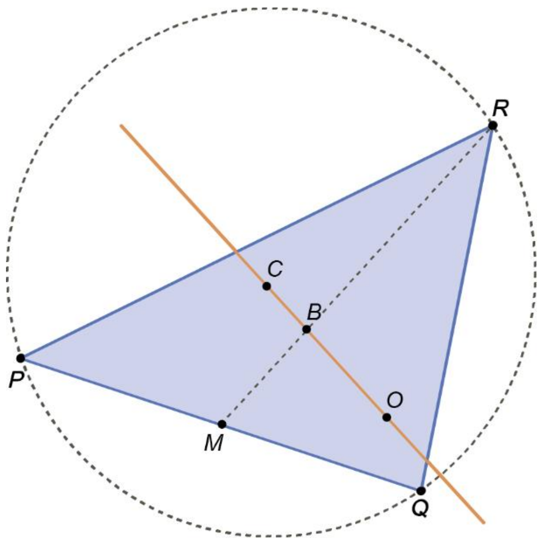
$$\overline{ON} = \frac{\overline{OC}}{2} = 2{,}1 \text{ cm} \quad ; \quad \overline{OB} = 2\overline{BC} = 2{,}8 \text{ cm}$$

$$\overline{BP} = \overline{OB} - \overline{ON} = 0{,}7 \text{cm}$$

15.3. Complete a construção do triângulo $[PQR]$.

Explique o seu raciocínio.

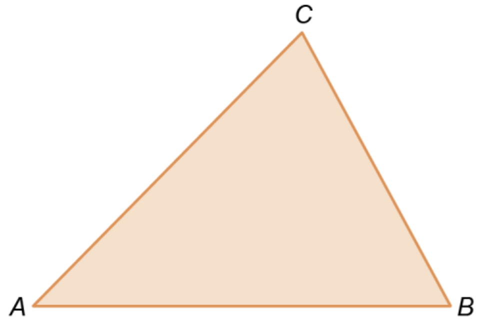
O ponto C é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, logo podemos começar por construir essa circunferência, de modo a determinarmos as possíveis posições para o ponto R. De seguida, determinamos o ponto médio de $[PQ]$, M, e desenhamos a semirreta de origem M que passa por B, essa semirreta contém uma das medianas no triângulo, que será o segmento de reta $[MR]$. O ponto R encontra-se na interseção da semirreta com a circunferência circunscrita.



16. O triângulo $[ABC]$ da figura é tal que $\overline{AB}=12$ cm, $\overline{BC}=9$ cm e $\overline{CA}=11$ cm.

Desenhe a circunferência dos nove pontos desse triângulo e localize, nessa circunferência, os nove pontos relevantes.

Apresente todos os passos da sua construção e explique o seu raciocínio.

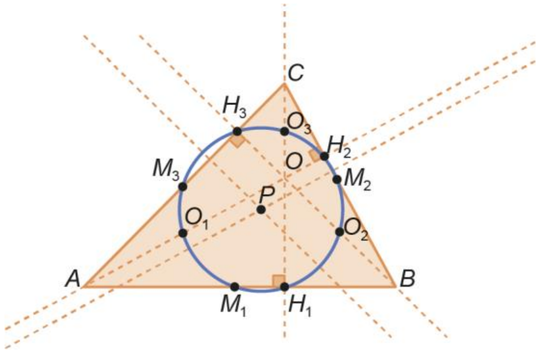


Construção da circunferência dos nove pontos:

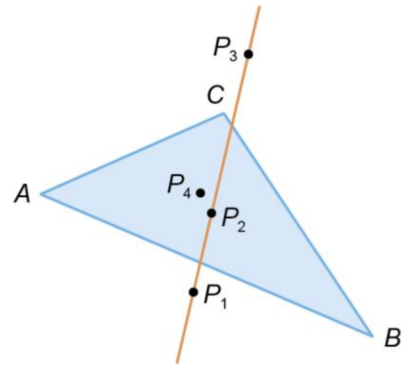
- Marcar os pontos médios de cada um dos lados do triângulo.
- Determinar o circuncentro do triângulo $[M_1M_2M_3]$ (centro da circunferência dos nove pontos, P).
- Desenhar a circunferência de centro P e que passa por M_1.

Determinar os restantes seis pontos relevantes:

- Desenhar as retas que contêm as alturas dos triângulos e na interseção dessas retas com a circunferência marcar os pontos H_1, H_2 e H_3 (pés das alturas dos triângulo).
- Marcar o ortocentro, O, que é o ponto de interseção das retas que contêm as alturas, e O_1, O_2 e O_3 (pontos médios dos segmentos de reta cujos extremos são o ortocentro e cada um dos vértices do triângulo).



17. Na figura está representado um triângulo, $[ABC]$, os seus quatro pontos notáveis e a reta de Euler.



17.1. Sabe-se que P_1 representa o circuncentro do triângulo.

Indique o que representam P_2 , P_3 e P_4

P_2 representa o baricentro (pertence à reta de Euler e não pode ser exterior ao triângulo).

P_3 representa o ortocentro (para além do circuncentro, é o ponto notável que pode estar no exterior do triângulo).

P_4 representa o incentro (é o único ponto notável que pode não pertencer à reta de Euler).

17.2. Comente a afirmação:

"O triângulo [ABC] é retângulo."

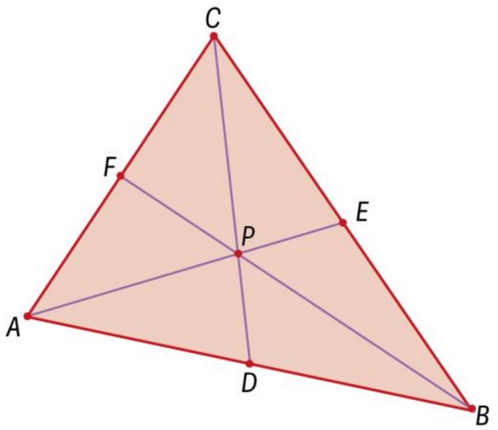
A afirmação é falsa.

O triângulo não é retângulo, pois há dois pontos notáveis no seu exterior. Qualquer que seja o triângulo, o incentro e o baricentro encontram-se no interior e, nos triângulos retângulos, o circuncentro é o ponto médio da hipotenusa e o ortocentro encontra-se no vértice do ângulo reto.

18. Considere o triângulo [ABC] representado na figura ao lado.

Sabe-se que:

- D , E e F são os pontos médio de [AB] , [BC] e [AC], respetivamente;
- P é o ponto de interseção das retas AE , CD e BF;
- $\overline{AB} = \overline{BC}$;
- $\overline{AF} = 8$;
- $\overline{FP} = 6$.



18.1. Como se designa o ponto P ?

Baricentro

18.2. Determine:

18.2.1. $\overline{PB}$

$\overline{PB} = 2 \times \overline{FP} = 2 \times 6 = 12$

18.2.2. $\overline{AP}$

$\overline{AB} = \overline{BC}$, então, $[ABC]$ é um triângulo isósceles e BF é perpendicular a $[AC]$.

$[AFP]$ é um triângulo retângulo em F.

$$\overline{AP}^2 = \overline{FP}^2 + \overline{AF}^2 \Leftrightarrow \overline{AP}^2 = 6^2 + 8^2 \Leftrightarrow \overline{AP}^2 = 100 \underset{\overline{AP}>0}{\Leftrightarrow} \overline{AP} = 10$$

18.3. Determine o perímetro dos triângulos [*CFP*] e [*BEP*].

$\overline{CP}=\overline{AP}=10$ e $\overline{CF}=\overline{AF}=8$

$P_{[CFP]}=\overline{CF}+\overline{FP}+\overline{CP}=8+6+10=24$

$\overline{PE}=\frac{1}{2}\overline{AP}=\frac{1}{2}\times 10=5$, $\overline{BP}=2\overline{FP}=2\times 6=12$ e $\overline{FB}=\overline{FP}+\overline{PB}=6+12=18$

$\overline{BC}^2=\overline{FB}^2+\overline{CF}^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2=18^2+8^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2=388 \underset{\overline{BC}>0}{\Leftrightarrow} \overline{BC}=2\sqrt{97}$

$\overline{BE}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{97}=\sqrt{97}$

$P_{[BEP]}=\overline{BE}+\overline{EP}+\overline{PB}=\sqrt{97}+5+12=17+\sqrt{97}$

18.4. Que relação existe entre as áreas dos polígonos [*CEPF*] e [*ABEPF*] ?

Justifique a sua resposta.

As medianas do triângulo dividem-no em seis triângulos com a mesma área.

$A_{[CEFP]}=2\times\frac{1}{6}A_{[ABC]}=\frac{1}{3}A_{[ABC]}$

$A_{[ABEPF]}=4\times\frac{1}{6}A_{[ABC]}=\frac{2}{3}A_{[ABC]}$

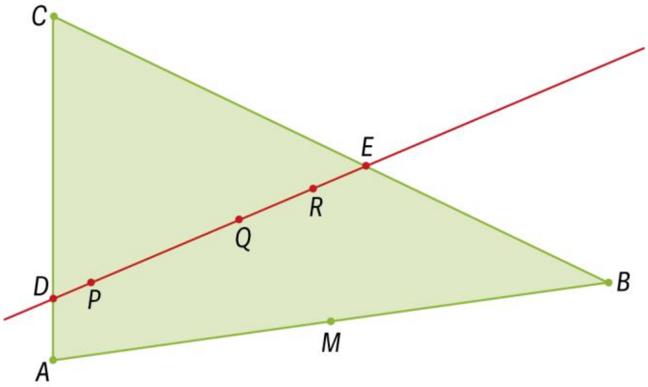
$A_{[ABEPF]}=2A_{[CEPF]}$

18.5. Determine a área do triângulo [*BCP*].

$A_{[ABC]}=\frac{\overline{AC}\times\overline{FB}}{2}=\frac{16\times 18}{2}=144$

$A_{[BCP]}=2\times\frac{1}{6}A_{[ABC]}=\frac{1}{3}\times 144=48$

19. Na figura seguinte pode observar-se um triângulo $[ABC]$ e a sua reta de Euler.



Sabe-se que:

- D e E são pontos de interseção da reta de Euler com o triângulo;
- M é o ponto médio de $[AB]$;
- $\overline{MQ} = 2,4$ cm ;
- $\overline{QR} = 2\overline{DP}$;
- $\overline{DE} = 5,9$ cm ;
- $\overline{ER} = 1$ cm ;
- a área do triângulo $[ABC]$ é 29,1 cm².

19.1. Como se designam cada um dos pontos P , Q e R ?

P – ortocentro; Q - baricentro; R – circuncentro

19.2. Considere as seguintes afirmações:

(I) $\overline{QR} = \frac{1}{2}\overline{PQ}$

(II) $\overline{QM} = \frac{1}{2}\overline{CM}$

(III) $3\overline{CQ} = 2\overline{CM}$

Selecione a opção correta:

(A) As afirmações **(I)** , **(II)** e **(III)** são verdadeiras.

(B) As afirmações **(I)** e **(II)** são verdadeiras e a afirmação **(III)** é falsa.

(C) As afirmações **(I)** e **(III)** são verdadeiras e a afirmação **(II)** é falsa.

(D) As afirmações **(II)** e **(III)** são verdadeiras e a afirmação **(I)** é falsa.

(I) Verdadeira;

(II) Falsa. $\overline{QM} = \frac{1}{3}\overline{CM}$;

(III) Verdadeira. $3\overline{CQ} = 2\overline{CM} \Leftrightarrow \overline{CQ} = \frac{2}{3}\overline{CM}$

OPÇÃO: C

19.3. Determine a distância entre:

19.3.1. o baricentro e o vértice C;

$\overline{CQ} = 2\times\overline{MQ} = 2\times 2,4 = 4,8$ cm

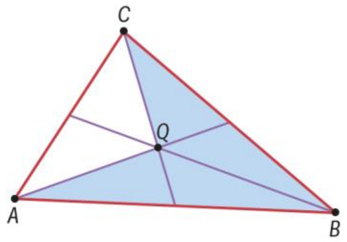
19.3.2. o ortocentro e o circuncentro.

$$\overline{DP}+\overline{PR}+\overline{RE}=5{,}9 \Leftrightarrow \overline{DP}+6\overline{DP}+1=5{,}9 \Leftrightarrow 7\overline{DP}=4{,}9 \Leftrightarrow \overline{DP}=\frac{4{,}9}{7} \Leftrightarrow \overline{DP}=0{,}7$$

C.A.
$\overline{PR}=\overline{PQ}+\overline{QR}=2\overline{QR}+\overline{QR}=3\overline{QR}=3\times 2\overline{DP}=6\overline{DP}$

$\overline{PR}=6\times\overline{DP}=6\times 0{,}7=4{,}2$ cm

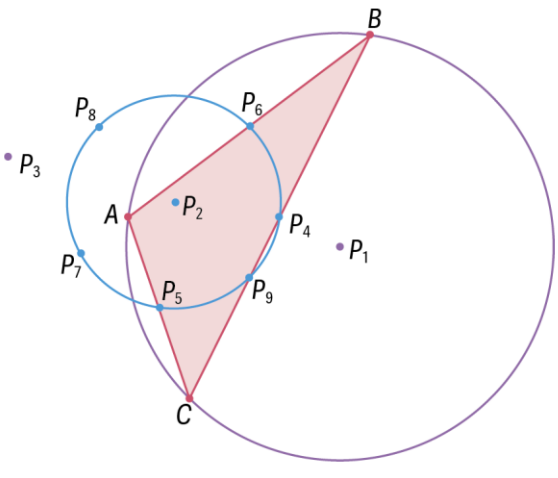
19.4. Calcule a área do polígono $[ABCQ]$.



$$A_{[ABCQ]}=4\times\frac{1}{6}A_{[ABC]}=\frac{2}{3}\times 29{,}1=19{,}4\text{ cm}^2$$

20. Na figura seguintes, estão representados o triângulo $[ABC]$, os seus ortocentro, circuncentro, a circunferência circunscrita ao triângulo, a circunferência dos nove pontos e o seu centro.

Sabe-se ainda que os pontos A , B e C, têm coordenadas $(3,2)$, $(7,5)$ e $(4,-1)$, respetivamente.



20.1. Identifique os pontos marcados, de P_1 a P_9 .

P_1 – circuncentro do triângulo;

P_2 – ponto médio do segmento de reta de extremos no circuncentro e no ortocentro do triângulo (centro da circunferência dos nove pontos);

P_3 – ortocentro do triângulo;

P_4 – ponto médio de $[BC]$;

P_5 – ponto médio de $[AC]$;

P_6 – ponto médio de $[AB]$;

P_7 – pé da perpendicular a $[AB]$ que passa por C;

P_8 – pé da perpendicular a $[AC]$ que passa por B;

P_9 – pé da perpendicular a $[BC]$ que passa por A

20.2. Determine as coordenadas do circuncentro do triângulo $[ABC]$[1].

Mediatriz de $[AC]$:

$$(x-3)^2+(y-2)^2=(x-4)^2+(y+1)^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2}-6x+9+\cancel{y^2}-4y+4=\cancel{x^2}-8x+16+\cancel{y^2}+2y+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4y-2y=-8x+6x+17-13 \Leftrightarrow -6y=-2x+4 \Leftrightarrow y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$$

Mediatriz de $[BC]$:

$$(x-7)^2+(y-5)^2=(x-4)^2+(y+1)^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2}-14x+49+\cancel{y^2}-10y+25=\cancel{x^2}-8x+16+\cancel{y^2}+2y+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -10y-2y=-8x+14x+17-74 \Leftrightarrow -12y=6x-57 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{19}{4}$$

$$\begin{cases} y=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3} \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{19}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}x+\frac{19}{4}=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3} \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x+57=4x-8 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6x-4x=-8-57 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -10x=-65 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{13}{2} \\ y=-\frac{1}{2}\times\frac{13}{2}+\frac{19}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{13}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$P_1\left(\frac{13}{2},\frac{3}{2}\right)$$

20.3. Escreva a equação da circunferência circunscrita ao triângulo $[ABC]$[2].

$$\text{raio}=\overline{AP_1}=\sqrt{\left(\frac{13}{2}-3\right)^2+\left(\frac{3}{2}-2\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{49+1}{4}}=\sqrt{\frac{50}{4}}=\sqrt{\frac{25}{2}}$$

$$\left(x-\frac{13}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\sqrt{\frac{25}{2}}^2 \Leftrightarrow \left(x-\frac{13}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$$

[1] Geometria analítica
[2] Geometria analítica

20.4. Determine a área e o perímetro da circunferência dos nove pontos do triângulo $[ABC]$.
Apresente o resultado com aproximação às centésimas.

O raio da circunferência dos nove pontos é metade do raio da circunferência circunscrita.

$$\overline{P_1P_4} = \frac{\sqrt{\frac{25}{2}}}{2} = \frac{5}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

$$A_{\bigcirc} = \pi \times r^2 = \pi \times \left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{25\times 2}{16}\pi = \frac{25}{8}\pi \approx 9{,}82$$

$$P_{\bigcirc} = 2\pi r = 2\pi \times \frac{5\sqrt{2}}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\pi \approx 11{,}11$$

20.5. Mostre que as coordenadas do baricentro do triângulo $[ABC]$ são $\left(\frac{14}{3}, 2\right)$.

Seja D o baricentro do triângulo.

Reta-suporte da mediana $[AP_4]$:

$$P_4 = \left(\frac{7+4}{2}, \frac{5-1}{2}\right) = \left(\frac{11}{2}, 2\right);\ A(3,2);\ m = \frac{2-2}{\frac{11}{2}-3} = 0\ ;\ AP_4 : y = b\ ;\ A \in AP_4\ ;\ AP_4 : y = 2$$

Reta-suporte da mediana $[CP_6]$:

$$P_6 = \left(\frac{3+7}{2}, \frac{2+5}{2}\right) = \left(5, \frac{7}{2}\right)\ ;\ C(4,-1)$$

$$m = \frac{\frac{7}{2}+1}{5-4} = \frac{9}{2}$$

$$AP_6 : y = \frac{9}{2}x + b \text{ e } C \in AP_6$$

$$-1 = \frac{9}{2}\times 4 + b \Leftrightarrow -1-18 = b \Leftrightarrow b = -19$$

$$AP_6 : y = \frac{9}{2}x - 19$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = \frac{9}{2}x - 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{2}x - 19 = 2 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x - 38 = 4 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x = 42 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{42}{9} \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{14}{3} \\ y = 2 \end{cases}$$

$$D\left(\frac{14}{3}, 2\right)$$

20.6. Determine a distância:

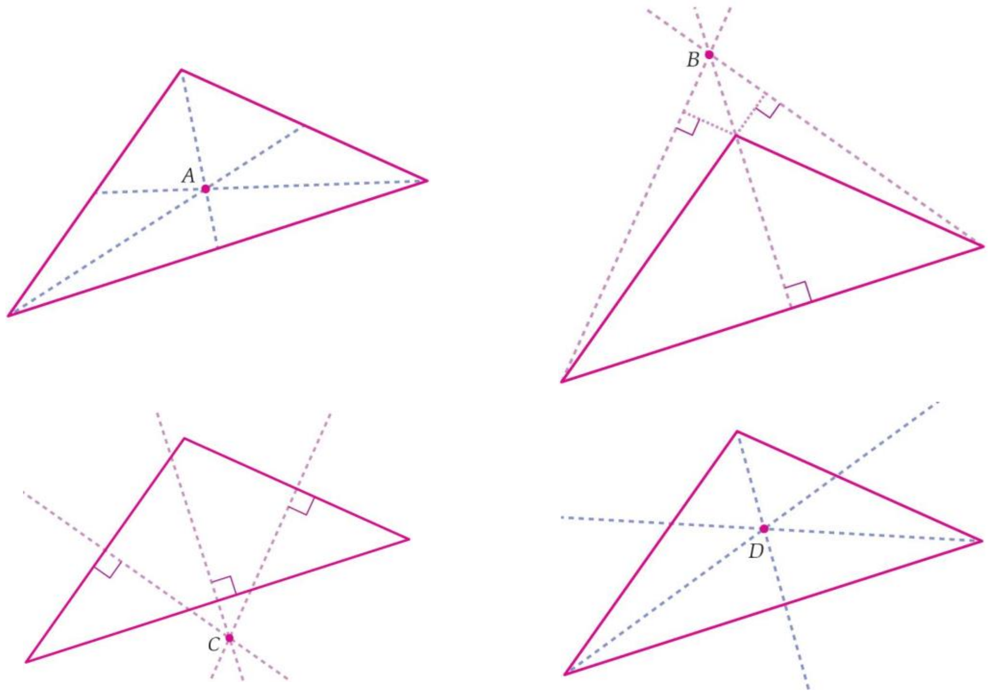
20.6.1. do baricentro ao circuncentro do triângulo $[ABC]$;

$$\overline{DP_1}=\sqrt{\left(\frac{14}{3}-\frac{13}{2}\right)^2+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{11}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{121}{36}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{130}}{6}$$

20.6.2. do baricentro ao ortocentro do triângulo $[ABC]$.

$$\overline{DP_3}=2\overline{DP_1}=2\frac{\sqrt{130}}{6}=\frac{\sqrt{130}}{3}$$

21. Na figura seguinte estão representados quatro triângulos escalenos, geometricamente iguais, e os pontos A, B, C e D.



Qual das afirmações, sobre os pontos A, B, C e D, pode ser verdadeira?

(A) São, respetivamente, o incentro, o circuncentro, o ortocentro e o baricentro do triângulo.

(B) São, respetivamente, o baricentro, o ortocentro, o circuncentro e o incentro do triângulo

(C) São, respetivamente, o ortocentro, o baricentro, o incentro e o circuncentro do triângulo

(D) São, respetivamente, o circuncentro, o incentro, o baricentro e o ortocentro do triângulo

OPÇÃO: B

22. Considere um triângulo retângulo de catetos 7 cm e 24 cm.

22.1. Qual é o comprimento da hipotenusa do triângulo.

$h^2 = 7^2 + 24^2 \Leftrightarrow h^2 = 625 \underset{h>0}{\Leftrightarrow} h = 25 \text{ cm}$

22.2. Considere a circunferência circunscrita ao triângulo.

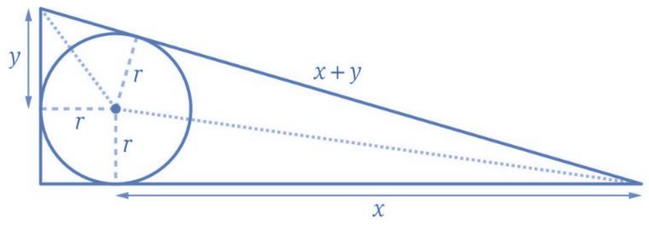
Determine o raio dessa circunferência.

Dado que o triângulo é retângulo, um diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo é a hipotenusa do triângulo, pelo que o centro da circunferência (circuncentro) é o ponto médio da hipotenusa, ou seja, o raio da circunferência circunscrita é $\frac{25}{2} = 12{,}5 \text{ cm}$.

22.3. Considere a circunferência inscrita no triângulo.

Determine o raio dessa circunferência.

Designando por r o raio, em centímetros, dessa circunferência, considere-se o seguinte esquema:

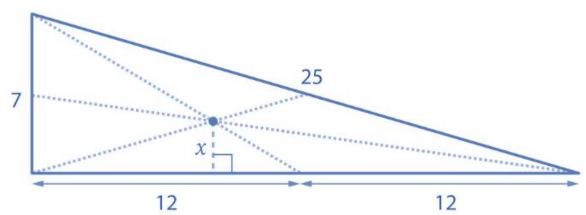


De acordo com o esquema tem-se que $\begin{cases} x + y = 25 \\ x + r = 24 \\ y + r = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 3 \\ x = 21 \\ y = 4 \end{cases}$, ou seja, $r = 3 \text{ cm}$.

22.4. Seja x a distância, em centímetros, do baricentro do triângulo ao cateto de comprimento 24 cm.

Determine x.

Considere-se o seguinte esquema:

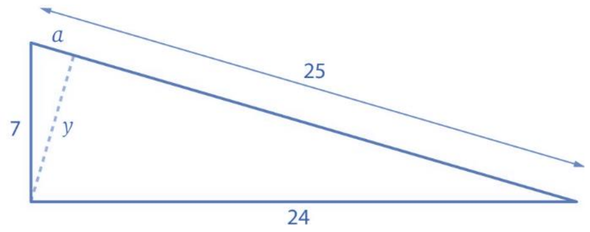


Dado que as três medianas dividem o triângulo em seis triângulos equivalentes (com a mesma área), conclui-se que $\frac{12 \times x}{2} = \frac{1}{6} \times \frac{24 \times 7}{2} \Leftrightarrow x = \frac{7}{3} \text{ cm}$.

22.5. Seja y a distância, em centímetros, do ortocentro do triângulo à hipotenusa.

Determina o valor de y com aproximação às décimas.

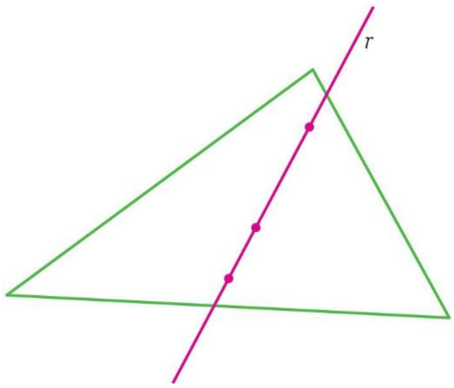
Considere-se o seguinte esquema:



Por semelhança de triângulos tem-se $\frac{a}{7}=\frac{7}{25} \Leftrightarrow a=\frac{49}{25} \approx 2{,}0\text{ cm}$. Assim, conclui-se que

$y \approx \sqrt{7^2-2{,}0^2} \approx 6{,}7\text{ cm}$

23. Na figura seguinte estão representados um triângulo escaleno, três dos pontos notáveis do triângulo e a reta r, reta de Euler relativamente a esse triângulo.



23.1. Qual dos seguintes pontos notáveis não está representado?

(A) O incentro

(B) O circuncentro

(C) O baricentro

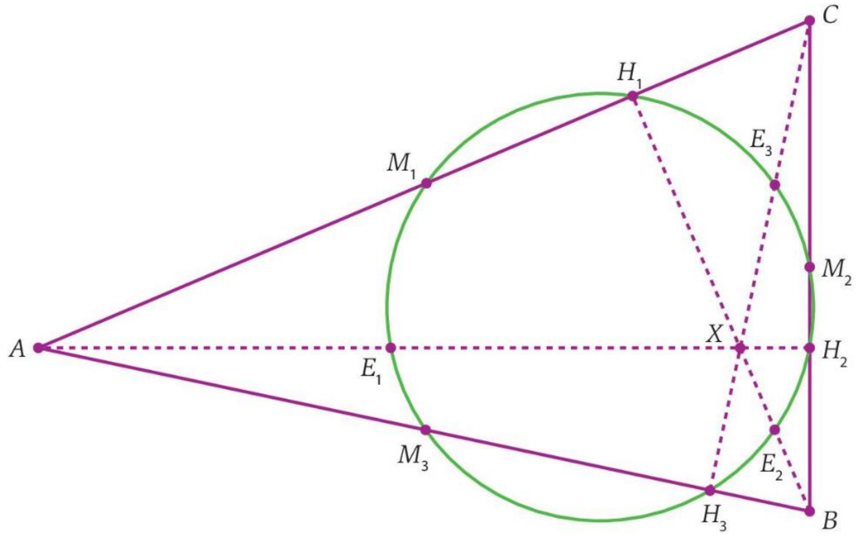
(D) O ortocentro

OPÇÃO: A

23.2. Justifique que, num triângulo retângulo, a reta de Euler é definida pelo ponto médio da hipotenusa e pelo vértice de ângulo reto.

Num triângulo retângulo, o circuncentro é o ponto médio da hipotenusa; por outro lado, o ortocentro é o vértice de ângulo reto. Dado que a reta de Euler contém o circuncentro e o ortocentro, e dois pontos definem uma reta, conclui-se que a reta de Euler é definida pelo ponto médio da hipotenusa e pelo vértice de ângulo reto.

24. Na figura seguinte estão representados o triângulo escaleno $[ABC]$, o ponto X e a circunferência dos nove pontos, relativamente a esse triângulo.



24.1. Qual das afirmações, sobre o ponto X, é verdadeira?

(A) É o baricentro de $[ABC]$

(B) É o incentro de $[ABC]$

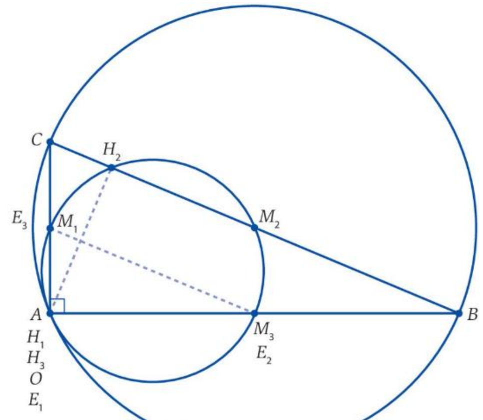
(C) É o circuncentro de $[ABC]$

(D) É o ortocentro de $[ABC]$

OPÇÃO: D

24.2. Prove que, num triângulo retângulo, o raio da circunferência circunscrita é o dobro do raio da circunferência dos nove pontos, relativamente a esse triângulo.

Considere-se o triângulo retângulo $[ABC]$ do seguinte esquema:



Dado que $[ABC]$ é um triângulo retângulo, o ortocentro, O, coincide com o vértice A e o centro da circunferência circunscrita é o ponto médio da hipotenusa, isto é, M_2. Conclui-se também que as projeções ortogonais dos vértices B e C nos lados opostos são, respetivamente, H_1 e H_3, que coincidem com o vértice A, e que a projeção ortogonal do vértice A no lado oposto é H_2. Assim, os pontos médios dos segmentos de reta com extremos no ortocentro e nos vértices do triângulo, E_1 , E_2 e E_3, coincidem, respetivamente, com O, M_3 e M_1, sendo M_3 e M_1 os pontos médios dos catetos do triângulo.

Conclui-se, finalmente, que, por semelhança de triângulos que $\overline{BC} = 2\overline{M_1M_3}$, ou seja, que $\overline{BM_2} = \overline{M_1M_3}$; por outro lado, $[M_1M_3]$ é um diâmetro da circunferência dos nove pontos pois o ângulo de vértice A é reto, donde se conclui que o raio da circunferência dos nove pontos é $\frac{1}{2}\overline{M_1M_3}$. Tem-se assim que $\overline{BM_2}$ (raio da circunferência circunscrita) é o dobro do raio da circunferência dos nove pontos $\left(\frac{1}{2}\overline{M_1M_3}\right)$.