Geometria Analítica no Espaço

Superfície Esférica e Esfera

1. $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2 \leq 3$

1.1 $z=\sqrt{3}$

$(x-1)^2+(y+2)^2+(\sqrt{3})^2 \leq 3$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+3 \leq 3$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2 \leq 0$

Significa que $z=\sqrt{3}$ é tangente à esfera.

Logo o conjunto de pontos da interseção é o ponto de coordenadas $(1,-2,\sqrt{3})$

1.2 Eixo Ox, $y=0 \wedge z=0$

$(x-1)^2+(0+2)^2+0^2=3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+4=3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=-1$ Impossível

Logo a esfera não interseta o eixo Ox

Eixo Oy, $x=0 \wedge z=0$

$$(0-1)^2 + (y+2)^2 + 0^2 = 3$$

$\Leftrightarrow 1 + (y+2)^2 = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y+2)^2 = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y+2 = -\sqrt{2} \vee y+2 = \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow y = -\sqrt{2}-2 \vee y = \sqrt{2}-2$

Eixo Oz, $x=0 \wedge y=0$

$$(0-1)^2 + (0+2)^2 + z^2 = 3$$

$\Leftrightarrow 1 + 4 + z^2 = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z^2 = 3-5$

$\Leftrightarrow z^2 = -2$ Impossível

logo a esfera não intersecta o eixo Oz

2. $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1^2-1^2+y^2+4y+2^2-2^2+z^2-6z+3^2-3^2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=14$

$C(1,-2,3)$ raio $=\sqrt{14}$

OPÇÃO: C

3. $A(1, -4, 5)$ $\quad B(-3, -2, 1)$

3.1

a) $r = \overline{AB} = \sqrt{(-3-1)^2 + (-2+4)^2 + (1-5)^2}$

$= \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$

$$(x-1)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 36$$

b) Seja C o ponto médio de $[AB]$

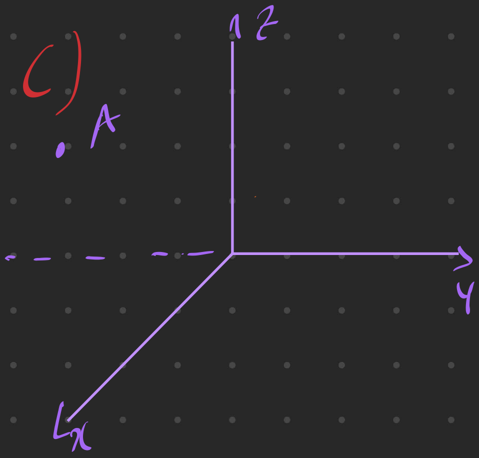
$$C\left(\frac{1-3}{2}, \frac{-4-2}{2}, \frac{5+1}{2}\right) = (-1, -3, 3)$$

$r = \overline{AC} = \sqrt{(-1-1)^2 + (-3+4)^2 + (3-5)^2}$

$= \sqrt{4+1+4} = 3$

$$(x+1)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 9$$

c)



A distância de A ao plano Oyz, que é definido pela equação $x=0$ é igual ao valor absoluto da abcissa do ponto, isto é, 1

$(x+1)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 9$

Assim o raio da superfície esférica é 1

Portanto a equação da superfície esférica é:

$$(x-1)^2+(y+4)^2+(z-5)^2=1$$

d) A distância de B ao plano Oxz é igual ao valor absoluto da ordenada de B, isto é, $|y_B| = |-2| = 2$. Logo o raio é 2

Assim, $(x+3)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=4$ é uma equação da superfície esférica

3.2 Por b) a superfície esférica é

$$(x+1)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=9$$

raio $=3$ e o centro é $C(-1,-3,3)$

Plano paralelo a Oxy

$$z=3+3 \Leftrightarrow z=6$$

$$z=3-3 \Leftrightarrow z=0$$

Plano paralelo a Oxz

$$y=-3+3 \Leftrightarrow y=0$$

ou

$$y=-3-3 \Leftrightarrow y=-6$$

Plano paralelo a Oyz

$$x=-1+3 \Leftrightarrow x=2$$

ou

$$x=-1-3 \Leftrightarrow x=-4$$

4. $(x+2)^2+y^2+(z-4)^2 \leq 25$

4.1 $z=7$

$$(x+2)^2+y^2+(7-4)^2 \leq 25$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2+y^2+9 \leq 25$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2+y^2 \leq 16$$

A secção é um círculo de centro $(-2,0,7)$ e raio 4

4.2 $-2-5 < k < -2+5$

$-7 < k < 3$

$k \in \left]-7, 3\right[$

4.3 $y = -1$

$(x+2)^2 + (-1)^2 + (z-4)^2 \leq 25$

$(x+2)^2 + (z-4) \leq 24$

logo o raio é $\sqrt{24}$

Assim $A_0 = 24\pi$

5. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = k$

$A(3, -1, 5)$ e $B(3, -3, 5)$

5.1 Como a superfície esférica é tangente ao plano Oxy e o centro é $(1, -2, 3)$ então o raio é igual à cota do centro, isto é, $r = 3$, logo $k = 3^2 \Leftrightarrow k = 9$ c.q.m.

5.2 Ponto $A(3,-1,5)$

$(3-1)^2+(-1+2)^2+(5-3)^2=9$

$\Leftrightarrow 4+1+4=9$

$\Leftrightarrow 9=9$ P.V.

Ponto $B(3,-3,5)$

$(3-1)^2+(-3+2)^2+(5-3)^2=9$

$\Leftrightarrow 4+1+4=9$

$\Leftrightarrow 9=9$ P.V.

Logo A e B pertencem à superfície esférica

5.3 Se $[AD]$ é um diâmetro então o centro da circunferência é o ponto médio de $[AD]$

Assim $\left(\frac{3+x}{2}, \frac{-1+y}{2}, \frac{5+z}{2}\right)=(1,-2,3)$

$\Leftrightarrow \frac{3+x}{2}=1 \wedge \frac{-1+y}{2}=-2 \wedge \frac{5+z}{2}=3$

$\Leftrightarrow 3+x=2 \wedge -1+y=-4 \wedge 5+z=6$

$\Leftrightarrow x=-1 \wedge y=-3 \wedge z=1$

$D(-1,-3,1)$

5.4

a) $(x-3)^2+(y+1)^2+(z-5)^2=(x-3)^2+(y+3)^2+(z-5)^2$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2}\cancel{-6x}\cancel{+9}+\cancel{y^2}+2y+1+\cancel{z^2}\cancel{-10z}\cancel{+25}=\cancel{x^2}\cancel{-6x}\cancel{+9}+\cancel{y^2}+6y+9+\cancel{z^2}\cancel{-10z}\cancel{+25}$

$\Leftrightarrow 2y-6y+1-9=0$

$\Leftrightarrow -4y-8=0$

$\Leftrightarrow y+2=0$

$\Leftrightarrow y=-2$

b) $y=-2$ passa pelo centro da superfície esférica.

Assim a secção é uma circunferência de raio 3.

Portanto o comprimento é $2\pi r=6\pi$

6.1 $\text{raio}=\overline{OA}=\sqrt{0^2+4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

$\therefore\ x^2+y^2+z^2=25$

6.2 $C\in Oz$, logo as coordenadas de C são do tipo $(0,0,z_c)$. Como C pertence à superfície esférica então $C(0,0,5)$

6.3 $\overline{AB} = \sqrt{(0-0)^2+(-4-4)^2+(3-3)^2} = \sqrt{(-8)^2} = 8$

$\overline{AC} = \sqrt{(0-0)^2+(0-4)^2+(5-3)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

$\overline{BC} = \sqrt{(0-0)^2+(0+4)^2+(5-3)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

$\overline{AC} = \overline{BC}$, logo o triângulo é isósceles

$P_{[ABC]} = 8 + 2\sqrt{20}$

6.4 $x^2+y^2+z^2 = 25$ centro $(0,0,0)$

Plano paralelo a Oxy

$z+5=0 \Leftrightarrow z=-5$

$z-5=0 \Leftrightarrow z=5$

Plano paralelo a Oxz

$y+5=0 \Leftrightarrow y=-5$

$y-5=0 \Leftrightarrow y=5$

Plano paralelo a Oyz

$x+5=0 \Leftrightarrow x=-5$

$x-5=0 \Leftrightarrow x=5$

7. Superfície esférica:

$$(x+3)^2+(y-2)^2+z^2=25$$

Eixo Oy : $x=0 \wedge z=0$

Interseção:

$$(0+3)^2+(y-2)^2+0^2=25$$

$\Leftrightarrow 9+(y-2)^2=25$

$\Leftrightarrow (y-2)^2=16$

$\Leftrightarrow y-2=-4 \vee y-2=4$

$\Leftrightarrow y=-2 \vee y=6$

Pontos de interseção

$(0,-2,0)$ e $(0,6,0)$

8.1 $x^2+y^2+z^2+4y-10z+13=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+4y+2^2-2^2+z^2-10z+5^2-5^2=-13$

$\Leftrightarrow x^2+(y+2)^2+(z-5)^2=-13+4+25$

$\Leftrightarrow x^2+(y+2)^2+(z-5)^2=16$

Centro: $(0,-2,5)$ raio: 4

8.2 $(0,-2,3)$

$$0^2+(-2+2)^2+(3-5)^2=16$$

$$4=16 \quad \text{P.F.}$$

logo $(0,-2,3)$ não pertence à superfície esférica

9. Como $y=-2$ e $y=2$ são planos tangentes à esfera então o raio é $r=|-2-2|=4$, e a ordenada do centro é $y=0$

Como $z=1$ é tangente e o raio é 4 então a cota do centro é:

$$z+4=1 \lor z-4=1$$

$$\Leftrightarrow z=-3 \lor z=5$$

Como $x=5$ é tangente e o raio é 4 então a abcissa do centro é:

$$x+4=5 \lor x-4=5$$

$$\Leftrightarrow x=1 \lor x=9$$

$\therefore (x-1)^2+y^2+(z+3)^2 \leq 16$ é uma inequação da esfera

10. $C(2,2,-2)$ $\quad y=-3$ tangente à superfície esférica

10.1 $y=-3$ é tangente e a ordenada do centro é $y=2$, $|-3-2|=5$

logo o raio é 5

$\therefore$ uma equação da superfície esférica é

$$(x-2)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=25$$

10.2 Uma equação do plano perpendicular ao eixo das abcissas é do tipo $x=a$, com $a\in\mathbb{R}$.

Como o plano contém o centro da superfície esférica, então a equação do plano é $x=2$

10.3 $A(1,1,1)$

$$(1-2)^2+(1-2)^2+(1+2)^2=25$$

$\Leftrightarrow 1+1+9=25 \Leftrightarrow 11=25$ P.F.

logo A não pertence à superfície esférica.

11. $C(5,7,9) \quad r=4$

Esfera: $(x-5)^2+(y-7)^2+(z-9)^2 \leq 16$

$z=k$, $k>9$ é um círculo com raio igual a $\sqrt{12}$ se $(x-5)^2+(y-7)^2 \leq 12$

$16-12=4$ então $(k-9)^2=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k-9=-2 \vee k-9=2$

$\Leftrightarrow k=7 \vee k=11$

Como $k>9$ então $k=11$

A condição que define o círculo é

$(x-5)^2+(y-7)^2 \leq 12 \wedge z=11$

12. $BCEF: y=20$

12.1 Como $[BCEF]$ está contida no plano de equação $y=20$ então o raio de cada uma das esferas é 5, logo o centro da esfera à esquerda é $(5,5,5)$

Portanto a inequação que define a esfera é $(x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2 \leq 25$

12.2 A equação que define a superfície à direita é $(x-5)^2+(y-15)^2+(z-5)^2=25$

A reta definida por $y=15 \wedge z=10$ interseta a superfície esférica em

$$(x-5)^2+(15-15)^2+(10-5)^2=25$$

$$\Leftrightarrow (x-5)^2+25=25$$

$$\Leftrightarrow (x-5)^2=0$$

$$\Leftrightarrow x-5=0$$

$$\Leftrightarrow x=5$$

As coordenadas do ponto são $(5,15,10)$

12.3 Esfera da esquerda

$$(x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2 \leq 25$$

Interseção com o plano $x=7$

$$(7-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2 \leq 25 \wedge x=7$$

$$\Leftrightarrow 4+(y-5)^2+(z-5)^2 \leq 25 \wedge x=7$$

$$\Leftrightarrow (y-5)^2+(z-5)^2 \leq 21 \wedge x=7$$

O raio do círculo é $\sqrt{21}$ logo o perímetro é $P=2\pi r=2\sqrt{21}\pi$

13. $A(-1,2,3)$ $B(1,0,3)$ $C(2,-1,3)$

13.1 $\overline{AB} = \sqrt{(1+1)^2+(0-2)^2+(3-3)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\overline{AC} = \sqrt{(2+1)^2+(-1-2)^2+(3-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\overline{BC} = \sqrt{(2-1)^2+(-1-0)^2+(3-3)^2} = \sqrt{2}$

$P_{[ABC]} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

13.2 Como P pertence ao semieixo positivo das ordenadas, então as coordenadas de P são do tipo $(0, y_P, 0)$ com $y_P > 0$

$\overline{AP} = \sqrt{35} \Leftrightarrow \cancel{\sqrt{}}(0+1)^2+(y_P-2)^2+(0-3)^2 = \cancel{\sqrt{}}35$

$\Leftrightarrow 1+(y_P-2)^2+9 = 35$

$\Leftrightarrow (y_P-2)^2 = 25$

$\Leftrightarrow y_P - 2 = -5 \lor y_P - 2 = 5$

$\Leftrightarrow y_P = -3 \lor y_P = 7$

$\underset{y_P>0}{\Leftrightarrow} y_P = 7$

$\therefore P(0,7,0)$

13.3 Seja M o ponto médio de [AP]

$$M\left(\frac{-1+0}{2}, \frac{2+7}{2}, \frac{3+0}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Como $\overline{AP} = \sqrt{35}$ então o raio da esfera é $r = \frac{\sqrt{35}}{2}$

A inequação que define a esfera é

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{9}{2}\right)^2 + \left(z-\frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{35}{4}$$

14.1 $(x+3)^2+(y-2)^2 \leq 16 \wedge z=6$

Círculo de centro no ponto $(-3, 2, 6)$ e raio 4

14.2 $(y-1)^2+z^2 \leq 9 \wedge x=3$

Círculo de centro no ponto $(3, 1, 0)$ e raio 3

14.3 $(x-2)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=4 \wedge y=-1$

$(x-2)^2+(-1+2)^2+(z+3)^2=4 \wedge y=-1$

$(x-2)^2+(z+3)^2=3 \wedge y=-1$

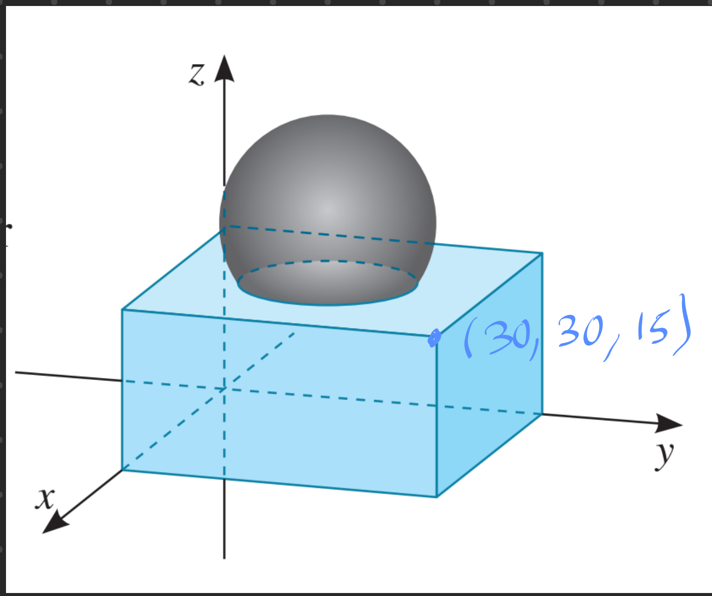
Circunferência de centro em $(2, -1, 3)$ e raio $\sqrt{3}$

15.1

A face que está contida no plano Oxz é definida pela condição

$0 \leq x \leq 30 \wedge y = 0 \wedge$

$\wedge \ 0 \leq z \leq 15$



15.2 Os extremos da diagonal espacial são os pontos $(0,0,0)$ e $(30,30,15)$

Seja $P(x,y,z)$ um ponto do plano mediador

$x^2+y^2+z^2 = (x-30)^2+(y-30)^2+(z-15)^2$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2}+\cancel{y^2}+\cancel{z^2} = \cancel{x^2}-60x+900+\cancel{y^2}-60y+900+\cancel{z^2}-30z+225$

$\Leftrightarrow 60x+60y+30z-2025=0$

$\Leftrightarrow 4x+4y+2z-135=0$

15.3 O centro da esfera tem coordenadas

$(15, 15, z_c)$ com $15 < z_c < 31$

Como a cota máxima é 31 então

Como a cota máxima é 31 então

$$z_C = 31 - r$$

Como o círculo de raio 8 é a intersecção do plano $z=15$ com a esfera, temos que

$$r^2 - (15 - z_C)^2 = 8^2 \Leftrightarrow r^2 - (15 - 31 + r) = 64$$

$$\Leftrightarrow r^2 - (r-16)^2 = 64 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r^2 - (r^2 - 32r + 256) = 64$$

$$\Leftrightarrow \cancel{r^2} - \cancel{r^2} + 32r - 256 = 64$$

$$\Leftrightarrow 32r = 320$$

$$\Leftrightarrow r = 10$$

Assim $z_0 = 31 - 10 = 21$

Logo o centro da esfera é $(15, 15, 21)$ e a inequação reduzida é

$$(x-15)^2 + (y-15)^2 + (z-21)^2 \leq 100$$

16. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 \leq 14$ [AB] é um diâmetro e $A(1,1,1)$

Como [AB] é diâmetro então o centro da esfera é o ponto médio de [AB]

Assim, $\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}, \frac{z+1}{2}\right) = (2, 3, 4)$

$\Leftrightarrow \frac{x+1}{2} = 2 \wedge \frac{y+1}{2} = 3 \wedge \frac{z+1}{2} = 4$

$\Leftrightarrow x+1 = 4 \wedge y+1 = 6 \wedge z+1 = 8$

$\Leftrightarrow x = 3 \wedge y = 5 \wedge z = 7$

$\therefore B(3, 5, 7)$

17. $C(1,1,1)$ tangente ao plano $z = 1+\sqrt{3}$

17.1 Como a superfície esférica tem centro $(1, 1, 1)$ e é tangente ao plano $z = 1+\sqrt{3}$ então o raio é:

$$r = |1+\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3}$$

Assim a equação da superfície esférica é $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3$

Os pontos da superfície esférica que têm as três coordenadas iguais satisfazem a condição (x, x, x) com $y = x \wedge z = x$

Assim $(x-1)^2+(x-1)^2+(x-1)^2=3$

$\Leftrightarrow 3(x-1)^2=3$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=1$

$\Leftrightarrow x-1=-1 \vee x-1=1$

$\Leftrightarrow x=0 \vee x=2$

Portanto as coordenadas são

$(0,0,0)$ e $(2,2,2)$

17.2 O raio da superfície esférica é $\sqrt{3}$

logo como $\sqrt{(0-2)^2+(0-2)^2+(0-2)^2}=\sqrt{12}=$

$=2\sqrt{3}$ que é o dobro do raio, logo os pontos que têm as três coordenadas iguais é um diâmetro da superfície esférica

17.3 O diâmetro da superfície esférica é a diagonal do cubo

Seja $\underline{\underline{a}}$ uma aresta do cubo.

Então $a^2+a^2+a^2=(2\sqrt{3})^2$

$\Leftrightarrow 3a^2=12$

$\Leftrightarrow a^2=4$

$\Leftrightarrow a=\pm 2$

$\Leftrightarrow a=2$
$a>0$

Logo $V_{cubo}=2^3=8$