



1. Considere, num referencial o.n.  $Oxyz$ , a esfera de inequação

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 \leq 3$$

- 1.1. Identifique o conjunto de pontos do espaço da interseção da esfera com o plano  $z = \sqrt{3}$ .  
1.2. Determine, caso existam, os pontos de interseção com os eixos coordenados da superfície esférica que limita a esfera.

2. Considere, num referencial o.n.  $Oxyz$ , o conjunto de pontos definido pela condição:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 0$$

A condição define:

- (A) uma circunferência de centro  $(-2, 4)$  e raio 7.  
(B) uma superfície esférica de centro  $(-1, 2, -3)$  e raio 14.  
(C) uma superfície esférica de centro  $(1, -2, 3)$  e raio  $\sqrt{14}$ .  
(D) o plano mediador do segmento de reta  $[AB]$ , sendo  $A(1, 3, 4)$  e  $B(2, -1, 3)$ .
3. Num referencial o.n.  $Oxyz$ , considere os pontos  $A(1, -4, 5)$  e  $B(-3, -2, 1)$ .
- 3.1. Defina, pela equação reduzida, a superfície esférica:
- de centro  $A$  e que passa em  $B$ ;
  - de diâmetro  $[AB]$ ;
  - de centro em  $A$  e tangente ao plano  $Oyz$ ;
  - de centro em  $B$  e tangente ao plano  $Oxz$ .
- 3.2. Indique, pelas suas equações cartesianas, os planos tangentes à superfície esférica de diâmetro  $[AB]$  e paralelos aos planos coordenados.

4. Fixado um referencial o.n.  $Oxyz$ , considere a esfera definida pela inequação  $(x+2)^2 + y^2 + (z+4)^2 \leq 25$ .

- 4.1. Caracterize a secção produzida na esfera pelo plano de equação  $z = 7$ .  
4.2. Determine os valores de  $k$  para os quais a secção na esfera produzida pela equação  $x = k$  é um círculo.  
4.3. Determine a área da secção produzida na esfera pelo plano de equação  $y = -1$ .

5. Para determinado valor de  $k$ , a equação  $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = k$  define, num referencial o.n.  $Oxyz$ , uma superfície esférica tangente ao plano  $Oxy$ .

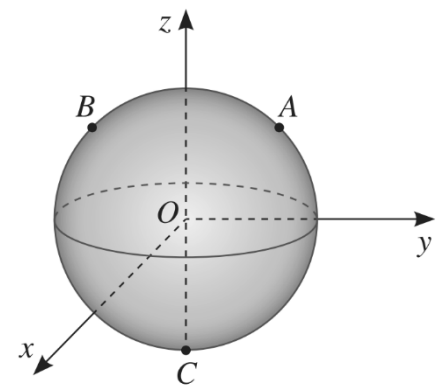
Considere ainda, no mesmo referencial, os pontos  $A(3, -1, 5)$  e  $B(3, -3, 5)$ .

- 5.1. Mostre que  $k = 9$ .
- 5.2. Mostre que os pontos  $A$  e  $B$  pertencem à superfície esférica.
- 5.3. Determine as coordenadas do ponto  $D$ , sabendo que  $[AD]$  é um diâmetro da superfície esférica.
- 5.4. Seja  $\alpha$  o plano mediador de  $[AB]$ .
  - a) Defina  $\alpha$  por uma equação cartesiana.
  - b) Determine o comprimento da secção produzida na superfície esférica pelo plano  $\alpha$ .

6. No referencial o.n.  $Oxyz$ , está representada uma superfície esférica de centro na origem e à qual pertencem os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Sabe-se que:

- o ponto  $C$  é um ponto de cota negativa do eixo  $Oz$ ;
- os pontos  $A$  e  $B$  têm coordenadas  $(0, 4, 3)$  e  $(0, -4, 3)$ , respetivamente.



- 6.1. Escreva a equação reduzida da superfície esférica.
- 6.2. Determine as coordenadas do ponto  $C$ .
- 6.3. Classifique, quanto aos lados, o triângulo  $[ABC]$  e determine o seu perímetro.
- 6.4. Indique as equações dos planos tangentes à superfície esférica e paralelos aos planos coordenados.

7. Determine as coordenadas, num referencial o.n.  $Oxyz$ , dos pontos de interseção da superfície esférica, de centro  $C(-3, 2, 0)$  e raio 5 com o eixo  $Oy$ .

8. Considere a superfície esférica definida pela equação

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4y - 10z + 13 = 0$$

- 8.1. Determine as coordenadas do centro e a medida do raio da superfície esférica.
- 8.2. Averigue se o ponto  $P$  de coordenadas  $(0, -2, 3)$  pertence à superfície esférica com o mesmo centro e raio da superfície esférica.

9. Indique as coordenadas do centro e o raio de uma esfera em que, num referencial o.n.  $Oxyz$ , os planos de equação  $z = 1$ ,  $x = 5$ ,  $y = -2$  e  $y = 2$  são planos que lhe são tangentes.

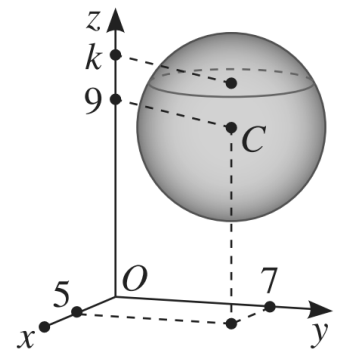
Escreva uma inequação que define essa esfera.

10. Num referencial o.n.  $Oxyz$ , foi representada uma superfície esférica cujo centro é  $C(2, 2, -2)$  e tal que o plano definido pela condição  $y = -3$  é tangente a essa superfície esférica.
- 10.1. Escreva a equação cartesiana reduzida da superfície esférica.
- 10.2. Qual é a equação do plano perpendicular ao eixo das abscissas e que contém o centro da superfície esférica?
- 10.3. Verifique se o ponto  $A(1, 1, 1)$  pertence à superfície esférica.

11. No referencial o.n.  $Oxyz$ , da figura está representada uma esfera de centro  $C(5, 7, 9)$  e raio 4.

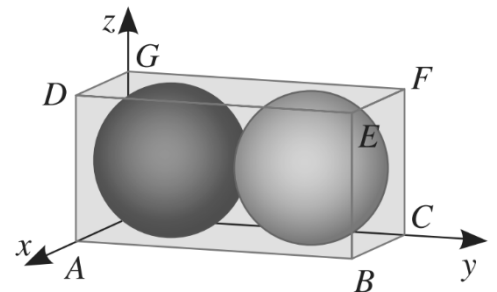
A interseção da esfera com o plano de equação  $z = k$  ( $k \in \mathbb{R} \wedge k > 9$ ) é um círculo de raio  $\sqrt{12}$ .

Determine o valor de  $k$  e escreva a condição que define esse círculo.



12. No referencial o.n.  $Oxyz$ , estão representados um prisma reto e duas esferas geometricamente iguais tangentes entre si e tangentes às faces do prisma.

O prisma tem a face  $[AOGD]$  contida em  $Oxz$ , face  $[ABCO]$  em  $Oxy$  e a face  $[BCEF]$  contida no plano de equação  $y = 20$ .



- 12.1. Escreva uma inequação que defina a esfera à esquerda da figura.
- 12.2. A reta definida pelo sistema  $y = 15 \wedge z = 10$ , intersesta uma das superfícies esféricas num ponto. Determine as coordenadas desse ponto.
- 12.3. Determine o perímetro do círculo que é a interseção da esfera à esquerda na figura com o plano  $x = 7$ .
13. Considere, num referencial o.n.  $Oxyz$ , os pontos  $A(-1, 2, 3)$ ,  $B(1, 0, 3)$  e  $C(2, -1, 3)$ .
- 13.1. Determine o perímetro do triângulo  $[ABC]$ .
- 13.2. Seja  $P$  um ponto do semieixo positivo das ordenadas. Determine as coordenadas do ponto  $P$  sabendo que  $\overline{AP} = \sqrt{35}$ .
- 13.3. Determine uma condição cartesiana da esfera de diâmetro  $[AP]$ .

14. Identifique os conjuntos dos pontos do espaço definidos pelas seguintes condições:

14.1.  $(x+3)^2 + (y-2)^2 \leq 16 \wedge z=6$

14.2.  $(y-1)^2 + z^2 \leq 9 \wedge x=3$

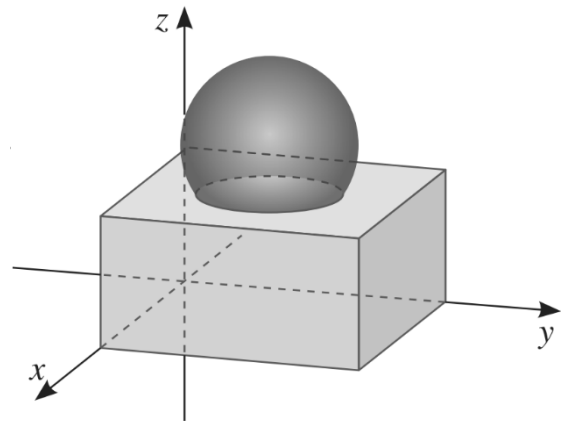
14.3.  $(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = 4 \wedge y=-1$

15. Na figura está representado, num referencial o.n.  $Oxyz$ , um sólido que pode ser decomposto num prisma quadrangular regular e num sólido que é parte de uma esfera.

As duas partes em que o sólido representado pode ser decomposto têm em comum um círculo de raio 8, cujo centro é também o centro da base superior do prisma.

Sabe-se ainda que:

- uma das arestas do prisma está contida no eixo  $Ox$ , outra no eixo  $Oy$  e outra no eixo  $Oz$ ;
- um dos vértices do prisma tem coordenadas  $(30, 30, 15)$ ;
- a cota máxima do sólido é igual a 31.



15.1. Defina por meio de uma condição, a face do prisma que está contida no plano  $Oxz$ .

15.2. Escreva uma equação do plano mediador da diagonal espacial do prisma que tem a origem do referencial como um dos extremos.

Apresente a sua resposta na forma  $ax + by + cz + d = 0$ , em que  $a, b, c$  e  $d$  designam números reais.

15.3. Determine o raio da esfera e as coordenadas do seu centro, escreva a sua inequação reduzida.

16. Considere, a esfera definida pela condição  $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 \leq 14$ .

Sabendo que  $[AB]$  é um diâmetro dessa esfera e que  $A$  tem coordenadas  $(1, 1, 1)$ .

As coordenadas de  $B$  são?

- (A)  $(2, 4, 8)$       (B)  $(3, 5, 7)$       (C)  $(4, 6, 5)$       (D)  $(5, 3, 6)$

17. Considere, num referencial o.n.  $Oxyz$ , a superfície esférica de centro no ponto de coordenadas  $(1, 1, 1)$  e tangente ao plano de equação  $z = 1 + \sqrt{3}$ .

17.1. Esta superfície esférica contém apenas dois pontos que têm as três coordenadas iguais.

Determine as coordenadas desses dois pontos.

17.2. O segmento de reta cujos extremos são os pontos da superfície esférica que têm as três coordenadas iguais é um diâmetro dessa superfície esférica.

Justifique a afirmação.

17.3. Determine o volume de um cubo inscrito nessa superfície esférica.