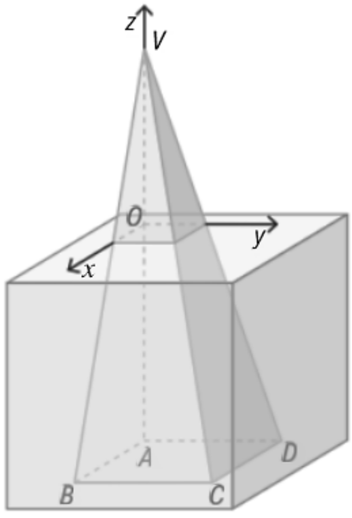
1. Um depósito com a forma de uma pirâmide e com uma capacidade de 216 litros encontra-se parcialmente submerso num tanque de água.
Na figura, encontra-se um esquema desse depósito, representado pela pirâmide $[ABCDV]$, tendo sido adotado um referencial ortonormado $Oxyz$ cuja unidade é o decímetro.
Sabe-se que:



- o nível da água do tanque é representado pelo plano Oxy;
- o depósito contém água até ao mesmo nível de água do tanque;
- a base da pirâmide é um quadrado com 6 decímetros de lado;
- a aresta $[AV]$ é perpendicular à base da pirâmide;
- as faces $[AVB]$ e $[ADV]$ estão contidas nos planos Oxz e Oyz, respetivamente, e o vértice V tem cota 9.

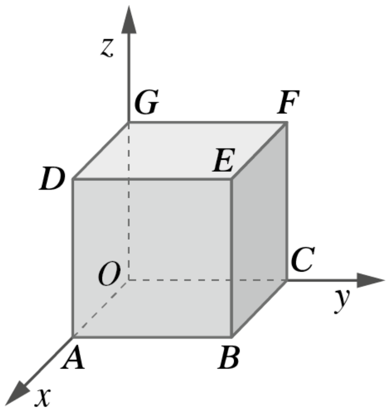
Determine:

1.1. A altura da água dentro do depósito;

1.2. As coordenadas dos vértices A , B , C , D e V.

1.3. A quantidade, em litros, de água existente no depósito.

2. Na figura ao lado está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[OABCDEFG]$.



Sabe-se que:

- o vértice O coincide com a origem do referencial;
- o vértice A pertence ao semieixo positivo Ox, o vértice C pertence ao semieixo positivo Oy e o vértice G pertence ao semieixo positivo Oz;
- a abcissa do ponto A é 2;
- os pontos A e D , B e E , C e F , e O e G pertencem a arestas do cubo paralelas ao eixo Oz.

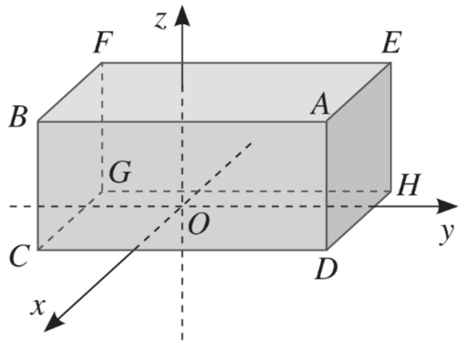
2.1. Escreva uma condição que defina a reta EF.

2.2. Mostre que o raio da superfície esférica que contém os oito vértices do cubo é $\sqrt{3}$ e determine uma equação dessa superfície esférica.

2.3. Determine uma equação do plano mediador do segmento de reta $[AC]$

3. Na figura seguinte está representado, num referencial *Oxyz*, o paralelepípedo [*ABCDEFGH*] de faces paralelas aos eixos coordenados.

Sabe-se que os pontos *A* e *G* tem coordenadas $(3,5,4)$ e $(-1,-3,0)$, respetivamente.



3.1. Calcule:

a) $\overline{CD}$

b) $\overline{CG}$

c) $\overline{AD}$

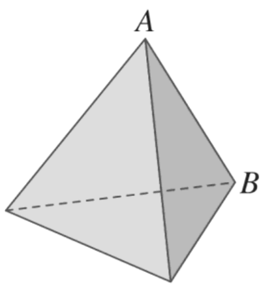
3.2. Utilizando o Teorema de Pitágoras, calcule:

a) $\overline{DG}$

b) $\overline{AG}$

4. As coordenadas de dois vértices, de um tetraedro regular num referencial o.n. *Oxyz*, são $(2,1,-2)$ e $(1,2,-3)$.

Determine a área total do tetraedro.



5. Em relação a um referencial o.n. $Oxyz$, considere os pontos $A(3,-2,1)$ e $B(-4,5,-3)$.

Determine a distância entre os:

5.1. pontos *A* e *B*;

5.2. pontos A e C, sendo C a projeção ortogonal de *B* sobre o eixo *Oz*;

5.3. pontos B e D, sendo D a projeção ortogonal de *A* sobre o plano *Oyz*.

6. Em relação a um referencial o.n. $Oxyz$, considere os pontos $A(-2,-3,2)$, $B(-4,1,5)$ e $C(-6,3,6)$.

Sabe-se que:

- o ponto *A'* é o ponto do plano *Oxz* mais próximo de *A*;
- o ponto *B'* é o ponto do plano *Oyz* mais próximo de *B*.

6.1. Mostre que o triângulo [*A' B' C*] é isósceles.

6.2. Determine a medida da área do triângulo [*A' B' C*].

7. Em relação a um referencial o.n. $Oxyz$, considere os pontos $R(1,3,-2)$ e $S(-4,2,-3)$ e α o plano mediador de $[RS]$.

7.1. Sem recorrer à equação do plano α, averigue se o ponto $T\left(-1,-\frac{1}{2},-2\right)$ pertence a α.

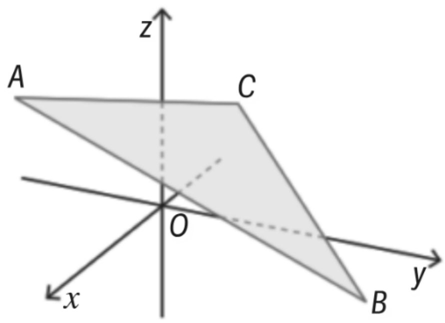
7.2. Mostre que o plano α pode ser definido pela equação $10x+2y+2z=-15$.

7.3. Determine as coordenadas do ponto de interseção de $[RS]$ com o plano α.

7.4. Dê exemplo das coordenadas de um ponto α que tenha ordenada 2.

7.5. Determine as coordenadas do ponto de interseção de α com cada um dos eixos coordenados.

8. Na figura estão representados, num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(4,-2,4)$, $B(1,6,-1)$ e $C(-2,0,1)$.

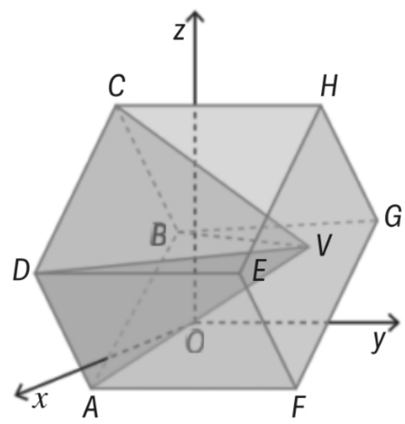


8.1. Mostre que o triângulo $[ABC]$ é isósceles.

8.2. Existe um ponto do semieixo positivo Oz cuja distância ao ponto A é igual à distância do ponto A à origem do referencial. Determine as coordenadas desse ponto.

8.3. Seja P o ponto médio do segmento de reta $[BC]$.
Determine o ponto médio do segmento de reta $[AP]$.

9. Na figura, estão representados, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$ e a pirâmide $[ABCDV]$.

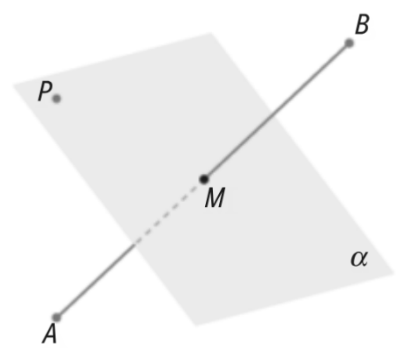


Sabe-se que o vértice V pertence ao plano EFG e que A e C têm coordenadas $(2,-1,-1)$ e $\left(\frac{4}{5},-1,\frac{37}{5}\right)$, respetivamente.

9.1. Mostre que a medida da aresta do cubo é 6.

9.2. Determine o volume da pirâmide.

10. Num referencial o.n. $Oxyz$, considere os pontos $A(3,-2,1)$ e $B(-1,-6,3)$.



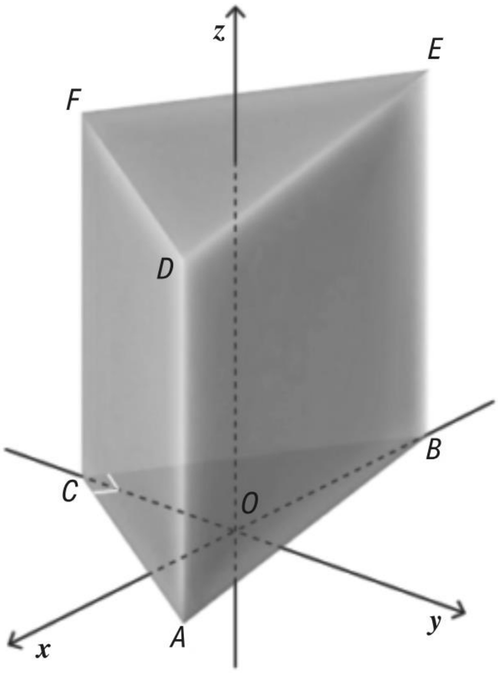
Seja α o plano mediador do segmento de reta $[AB]$ e M o ponto de interseção da reta AB com o plano α.

10.1. Determine $d(M,B)$.

10.2. Determine a equação cartesiana do plano α.

10.3. Sabendo que o ponto $P(k,-3,3k)$, com $k\in IR$, pertence ao plano α, determine o valor de k.

11. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma triangular não regular $[ABCDEFG]$.



Sabe-se que:

- as bases são triângulos retângulos isósceles $\left(\overline{BC}=\overline{CA} \text{ e } \overline{EF}=\overline{FD}\right)$;
- a base $[ABC]$ está contida no plano Oxy;
- as arestas laterais são perpendiculares às bases;
- o ponto A tem coordenadas $(2,1,0)$;
- o ponto B tem coordenadas $(-3,0,0)$;
- o ponto C pertence ao semieixo negativo Oy;
- o volume do prisma é 26.

11.1. Determine a distância entre A e B.

11.2. Prove que o ponto C tem coordenadas $(0,-2,0)$.

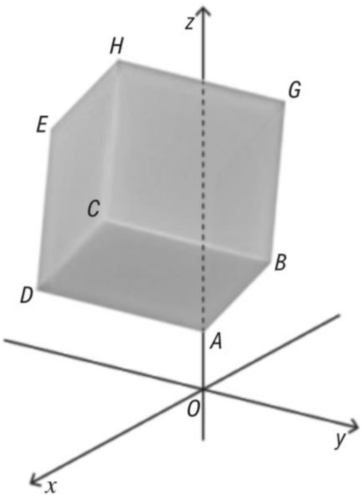
11.3. Determine a altura do prisma.

11.4. Escreva uma condição que contém a aresta $[CF]$.

11.5. Escreva uma equação do plano paralelo ao plano Oxz e que passa no ponto médio do segmento de reta $[FA]$.

11.6. Determine as coordenadas do ponto P que pertence ao semieixo positivo Oy de modo que o ponto E esteja à mesma distância de A e P.

12. Na figura, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[ABCDEFGH]$, o vértice F não é visível.



Sabe-se que:

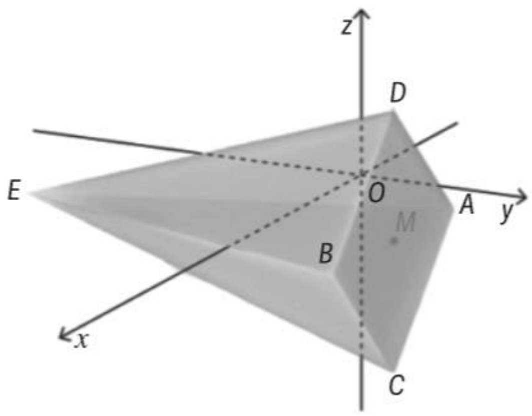
- o vértice A pertence ao eixo Oz;
- $B(1,2,3)$, $D(2,-2,2)$ e $H(1,-1,6)$

12.1. Determine a equação geral do plano mediador do segmento de reta $[BD]$.

12.2. Mostre que o vértice A tem cota 1.

12.3. Determine as coordenadas do ponto médio do segmento de reta $[AH]$.

13. Na figura, está representada, num referencial cartesiano $Oxyz$, uma pirâmide $[ABCDE]$.



Sabe-se que:

- a base $[ABCD]$ é um quadrado;
- a base está contida num plano paralelo a Oxz;
- as coordenadas de A e B são $(1,2,0)$ e $(5,2,0)$;
- M é o ponto médio do segmento de reta $[AB]$;
- $\overline{ME}$ é a altura da pirâmide;
- o volume da pirâmide é 16 .

13.1. Escreva a equação do plano que contém a base.

13.2. Determine as coordenadas de M.

13.3. Determine as coordenadas dos vértices C e D.

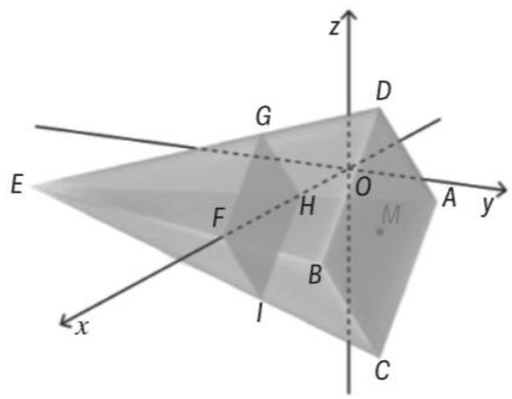
13.4. Determine a equação do plano mediador do segmento de reta $[AD]$.

Apresente na forma $ax+by+cz+d=0$.

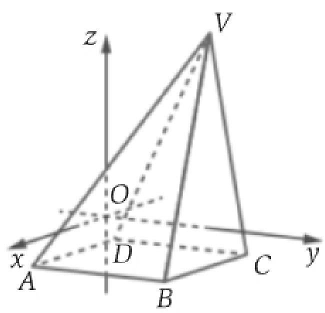
13.5. Determine as coordenadas do vértice E .

13.6. O plano Oxz interseta a pirâmide no quadrado $[FGHI]$, como se observa na figura.

Determine as coordenadas dos vértices desse quadrado.



14. Na figura, está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide $[BCDV]$ cuja base é um quadrado.



Sabe-se que:

- $AB: x=2 \wedge z=-1$; $AD: y=-1 \wedge z=-1$ e $BC: y=3 \wedge z=-1$;
- a pirâmide tem 32 unidades de volume.

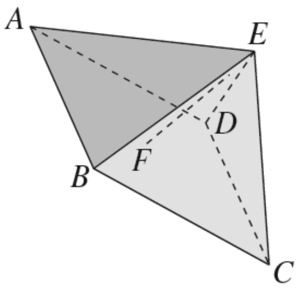
Determine a cota do ponto V .

15. Considera, num referencial o.n. $Oxyz$, os pontos A e B de coordenadas $(2,-1,a+1)$ e $(2,1,1-a)$, respetivamente, com $a \in IR$.

Determine os valores de a para os quais um quadrado de diagonal $[AB]$ tem 8 unidades de área.

16. Na figura está representada uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDE]$, em que F é o centro da sua base.

Sabe-se que, num referencial o.n. $Oxyz$, $D(-6,0,-2)$, $E(-3,3,1)$ e $F(-2,1,-1)$.



16.1. Determine o volume da pirâmide.

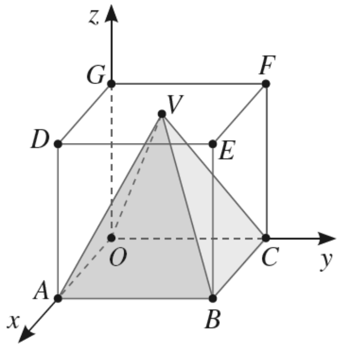
16.2. Determine uma equação do plano mediador de $[ED]$.

Apresente a sua resposta na forma $ax+by+cz+d=0$, com $a, b, c, d \in IR$.

17. No referencial o.n. $Oxyz$ da figura estão representados um cubo e uma pirâmide de base $[OABC]$ e vértice no centro da face $[DEFG]$ do cubo.

Sabe-se que:

- os vértices A, C e G pertencem ao semieixo positivo Ox, Oy e Oz, respetivamente;
- o volume da pirâmide é 9 cm³.



17.1. Determine a medida da aresta do cubo e indique as coordenadas do vértice V da pirâmide.

17.2. O plano de equação $x=\frac{3}{2}$ é o plano mediador de quatro arestas do cubo. Identifique-as.

17.3. Determine as coordenadas do ponto P, pertence ao eixo Oz e ao plano mediador de $[VB]$.

17.4. Determine uma equação do plano DFC.

Apresente a sua resposta na forma $ax+by+cz=d$, com $a, b, c, d \in IR$.