Geometria analítica no espaço

Planos paralelos aos planos coordenados e retas paralelas aos eixos coordenados

1.1 $A(2,3,5)$; $B(2,3,2)$; $C(2,6,2)$; $F(-3,3,5)$; $G(-3,6,5)$; $H(-3,6,2)$

1.2 a) $x=2$ b) $y=6$ c) $z=2$

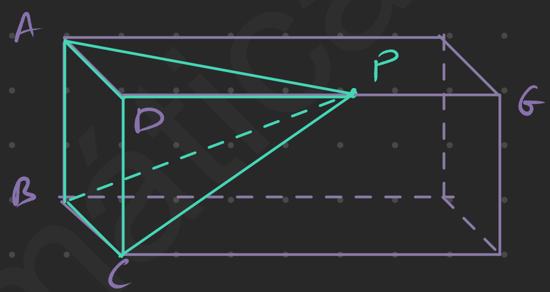
d) $x=-3$ e) $y=3$ f) $z=5$

1.3 a) $x=2 \wedge y=3$

b) $y=6 \wedge z=2$

c) $x=-3 \wedge z=5$

1.4



$$V_{[ABCDP]} = \frac{1}{3} A_{[ABCD]} \times \overline{DP}$$

Sabemos que $V_{[ABCDP]} = \frac{1}{5} V_{[ABCDEFGH]}$

$$\begin{aligned} V_{[ABCDEFGH]} &= A_{[ABCD]} \times \overline{DG} \\ &= \overline{AB} \times \overline{BC} \times \overline{DG} \\ &= |z_A - z_B| \times |y_B - y_C| \times |x_D - x_G| \\ &= |5-2| \times |3-6| \times |2+3| = \\ &= 3 \times 3 \times 5 = 45 \end{aligned}$$

Então $V_{[ABCDP]} = \frac{1}{5} \times 45 \Leftrightarrow V_{[ABCDP]} = 9$

$V_{[ABCDP]} = \frac{1}{3} A_{[ABCD]} \times \overline{DP}$

$\Leftrightarrow \cancel{9} = \frac{1}{3} \times \cancel{9} \times \overline{DP}$

$\Leftrightarrow \overline{DP} = 3$

P é um ponto de [DG], então

P tem coordenadas do tipo $(x_P, 6, 5)$

$\overline{DP} = 3 \Leftrightarrow |x_P - 2| = 3$

$\Leftrightarrow x_P - 2 = 3 \vee x_P - 2 = -3$

$\Leftrightarrow x_P = 5 \vee x_P = -1$

Como $x_G \leq x_P \leq x_D$

$-3 \leq x_P \leq 2$

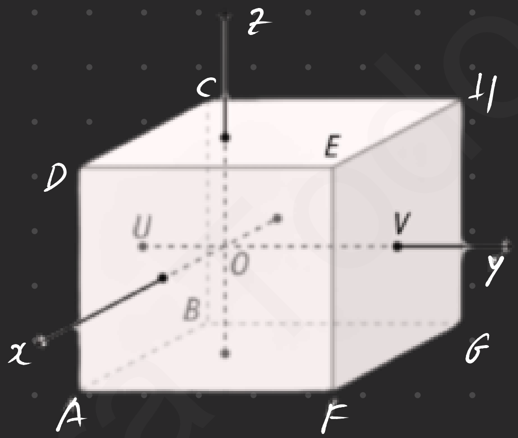
Então $x_P = -1$

$\therefore P(-1, 6, 5)$

2.1 $y = 3$

2.2 $x = -1 \wedge z = 5$

3.1 Sabemos que



U e V pertencem a Oy e são centro das bases do prisma que são quadrados de lado $|5-(-5)| = 10$.

DC é paralela a Ox, e $\overline{DC} = 5$ (lado do quadrado da base).

Assim, as faces do prisma estão contidas nos planos de equações:

$x=-5$, $x=5$, $y=-4$, $y=8$, $z=-5$ e $z=5$

logo:

$A(5,-4,-5)$; $B(-5,-4,-5)$

$C(-5,-4,5)$; $D(5,-4,5)$

$E(5,8,5)$; $F(5,8,-5)$

$G(-5,8,-5)$; $H(-5,8,5)$

3.2 a) [EF]

$E(5, 8, 5)$

$F(5, 8, -5)$

$x = 5 \wedge z = 8 \wedge -5 \leq z \leq 5$

b) [DCEH]

$D(5, -4, 5)$

$C(-5, -4, 5)$

$E(5, 8, 5)$

$H(-5, 8, 5)$

$-5 \leq x \leq 5$

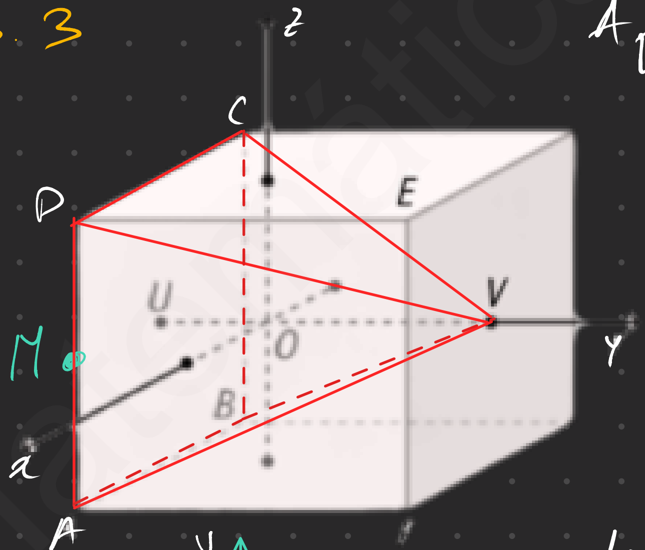
$\wedge$

$-4 \leq y \leq 8$

$\wedge$

$z = 5$

3.3



$A_{[ABCDV]} = A_{[ABCD]} + 4A_{[ADV]}$

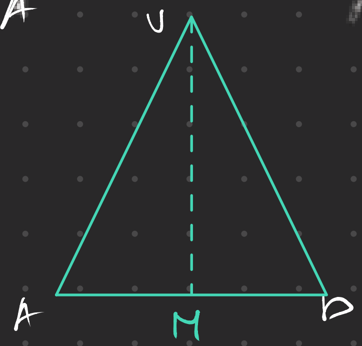
$A_{[ABCD]} = 5^2 = 25$

$A_{[ADV]}$

Seja M o ponto médio de [AD].

$M\left(\frac{5+5}{2}, \frac{-4-4}{2}, \frac{-5+5}{2}\right)$

$M(5, -4, 0)$



V está no centro da face [EFGH] e pertence a Oy, então $V(0,8,0)$

$$d(M,V) = \sqrt{5^2+(-4+8)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$$

$$A_{[ADV]} = \frac{10 \times 13}{2} = 5 \times 13 = 65$$

$$A_{[ABCDV]} = 25 + 4 \times 65 = 285$$

4. OPÇÃO B

5.1 O plano paralelo a Oxy e que passa em $(2,3,4)$ pode ser definido pela equação $z=4$

5.2 O plano perpendicular a Ox e que passa por $(1,-2,0)$ é paralelo a Oyz, logo, pode ser definido pela equação $x=1$

5.3 O plano paralelo ao plano $y=-1$ e que passa pela origem é $y=0$

6\. O ponto P como pertence ao plano Oxy tem cota zero e como pertence ao plano $y=4$, tem ordenada 4.

Assim, $a+3=4 \wedge 2b=0$

$a=1 \wedge b=0$

7.1 $\dfrac{V_{cubo\ maior}}{V_{cubo\ menor}} = \dfrac{27}{8}$?

$$\frac{V_{cubo\ maior}}{V_{cubo\ menor}} = \frac{\overline{OH}^3}{\overline{OA}^3}$$

$$\overline{AH} = \frac{\overline{OH}}{3} \Leftrightarrow \overline{OH} = 3\overline{AH}$$

C.A.
$\overline{AH} = \overline{OH} - \overline{OA}$

$$\Leftrightarrow \overline{OH} = 3(\overline{OH} - \overline{OA})$$

$$\Leftrightarrow \overline{OH} = 3\overline{OH} - 3\overline{OA}$$

$$\Leftrightarrow -2\overline{OH} = -3\overline{OA}$$

$$\Leftrightarrow \overline{OH} = \frac{3}{2}\overline{OA}$$

Assim $\dfrac{\overline{OH}^3}{\overline{OA}^3} = \dfrac{\left(\frac{3}{2}\overline{OA}\right)^3}{\overline{OA}^3} = \dfrac{\frac{27}{8}\cancel{\overline{OA}^3}}{\cancel{\overline{OA}^3}} =$

$= \dfrac{27}{8}$ c.q.m.

eduardo.pinhao@matematicaparatodos.pt

7.2 $\overline{OH} = 6$

a) $\overline{OJ} = \overline{OH} = 6$

logo o plano LIJ é definido por

$y = 6$

b) $\overline{AH} = \frac{\overline{OH}}{3} = \frac{6}{3} = 2$, logo $\overline{OA} = 6 - 2 = 4$

AB é paralela a Oy

$AB: x = 4 \wedge z = 0$

8.1 $A(5,0,0)$; $B(5,5,0)$; $C(0,5,0)$

$O(0,0,0)$; $D(5,0,5)$; $E(5,5,5)$

$F(0,5,5)$ e $G(0,0,5)$

8.2 $L(5, 10, -5)$

8.3 a) BEF é paralelo a Oxz e o

ponto B tem ordenada 5.

$BEF: y = 5$

b) DHI é paralelo a Oxy e D tem cota 5

DHI: $z=5$

c) ABD é paralelo a Oyz e A tem abcissa 5.

ABD: $x=5$

8.4 Pontos: A, B e K

9.1 $A(0,-4,0)$; $B(3,-4,0)$; $C(3,0,0)$
$O(0,0,0)$; $E(0,-4,-2)$; $F(3,0,-2)$
$G(0,0,-2)$

9.2 a) O plano ABC coincide com o plano Oxy.

ABC: $z=0$

b) O plano BDF é paralelo a Oyz e o ponto D tem abcissa 3.

BDF: $x=3$

c) O plano ABD é paralelo a Oxz e o ponto B tem ordenada -4.

$ABD: y=-4$

9.3 $x=3$ e $z=-2$, a interseção é a reta DF.

10.1 $A(5,0,7)$; $B(5,7,7)$; $C(0,7,7)$
$E(5,0,4)$; $F(5,7,4)$; $G(0,7,4)$
$H(0,0,4)$

10.2 a) plano ABE

b) Reta AB

c) Reta CG

d) Reta FG

e) Ponto G

11.1 O plano JKL é coincidente com a face [JKLM] e é paralelo a Oxy

O ponto J tem cota $\frac{7}{2}+4=\frac{15}{2}$

logo JKL: $z=\frac{15}{2}$

11.2 Reta DG

11.3 [LI]

$L\left(-4,-4,\frac{15}{2}\right)$

$I\left(-4,-4,\frac{7}{2}\right)$

$$x=-4 \wedge y=-4 \wedge \frac{7}{2}\leq z\leq \frac{15}{2}$$

11.4 [JKLM]

$J\left(0,-8,\frac{15}{2}\right)$

$K\left(0,-4,\frac{15}{2}\right)$

$L\left(-4,-4,\frac{15}{2}\right)$

$M\left(-4,-8,\frac{15}{2}\right)$

$$0\leq x\leq -4 \wedge -4\leq y\leq -8 \wedge z=\frac{15}{2}$$

eduardo.pinhao@matematicaparatodos.pt

12.1 $A(5,0,0)$; $B(5,5,0)$; $C(0,5,0)$

$O(0,0,0)$; $D(5,0,5)$; $E(5,5,5)$

$F(0,5,5)$; $G(0,0,5)$

12.2 a) $ADB: \quad x=5$

$GDE: \quad z=5$

$BCE: \quad y=5$

b) $AD: \quad x=5 \wedge y=0$

$DE: \quad x=5 \wedge z=5$

$BC: \quad y=5 \wedge z=0$

c) $[BE]$ $\quad B(5,5,0)$

$E(5,5,5)$

$$x=5 \wedge y=5 \wedge 0 \leq z \leq 5$$

d) $[ABCO]$ $\quad A(5,0,0)$

$B(5,5,0)$

$C(0,5,0)$

$O(0,0,0)$

$$0 \leq x \leq 5 \wedge 0 \leq y \leq 5 \wedge z=0$$

12.3 $A(5,0,0)$ $F(0,5,5)$

Seja $P(x,y,z)$ um ponto do plano mediador de $[AF]$

$$(x-5)^2+y^2+z^2=x^2+(y-5)^2+(z-5)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x^2}-10x+\cancel{25}+\cancel{y^2}+\cancel{z^2}=\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-10y+\cancel{25}+\cancel{z^2}-10z+25$$

$$-10x+10y+10z-25=0$$

13.1 B tem a mesma ordenada e cota de A e tem a mesma abcissa de C

$B(-3,3,4)$

D tem a mesma abcissa e cota de A e a mesma ordenada de C

$D(2,-5,4)$

13.2

a) $V(0,0,0)$

b) $C(0,-5,4)$

c) $D(2,0,4)$

13.3

$A(2,3,4)$

$B(-3,3,4)$

$C(-3,-5,4)$

$ABC: \ z=4$

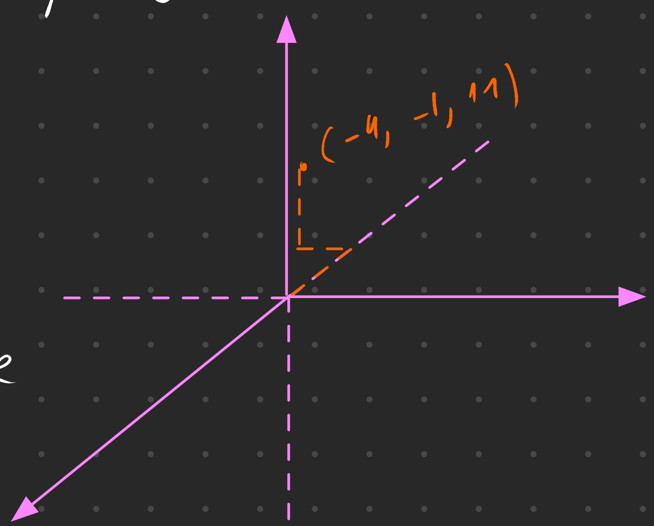
14.1

$k=-2$

$(-2-2, \ -1, \ 5-3\times(-2))$

$(-4, \ -1, \ 11)$

$x<0 \ \wedge \ y<0 \ \wedge \ z>0$



3° Octante

14.2 Um ponto do 7.º Octante tem coordenadas do tipo (x, y, z) com

$x < 0 \wedge y < 0 \wedge z < 0$

Assim $k - 2 < 0 \wedge 5 - 3k < 0$

$k < 2 \wedge -3k < -5$

$k < 2 \wedge 3k > 5$

$k < 2 \wedge k > \frac{5}{3}$

$k \in \left]\frac{5}{3}, 2\right[$

15. $Q(2-a, a, a-3)$

$$\text{Cota} = \frac{\text{abcissa} \times \text{ordenada}}{2}$$

$$a - 3 = \frac{(2-a) \times a}{2} \Leftrightarrow \cancel{2a} - 6 = \cancel{2a} - a^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 6 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{6}$$

se $a = \sqrt{6}$

$Q(\underbrace{2-\sqrt{6}}_{<0}, \underbrace{\sqrt{6}}_{>0}, \underbrace{\sqrt{6}-3}_{<0}) \in$ 6.º Octante

se $a = -\sqrt{6}$

$Q(\underbrace{2+\sqrt{6}}_{>0}, \underbrace{-\sqrt{6}}_{<0}, \underbrace{-\sqrt{6}-3}_{<0}) \in$ 8.º Octante