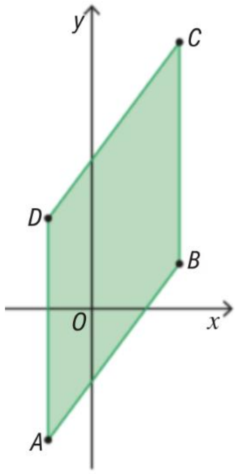
1. Na figura está representado, num referencial o.n. Oxy, o losango $[ABCD]$.

Sabe-se que:

- B e D têm coordenadas $(4,2)$ e $(-2,4)$, respetivamente;
- a reta AD é paralela ao eixo Oy.



1.1. Determine a equação reduzida da mediatriz do segmento de reta $[DB]$.

Seja $P(x,y)$ um ponto da mediatriz de $[DB]$

$$d(D,P)=d(B,P)\Leftrightarrow\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cancel{x^2}+4x+4+\cancel{y^2}-8y+16=\cancel{x^2}-8x+16+\cancel{y^2}-4y+4\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -8y+4y=-4x-8x-20+20\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4y=-12x\Leftrightarrow y=3x$$

1.2. Determine as coordenadas dos pontos A e C.

A reta AD é paralela ao eixo Oy, logo é uma reta vertical e como $D(-2,4)$, então, $x=-2$

O ponto A pertence à reta $x=-2$, e à mediatriz de $[BD]$, pela definição de losango $\overline{AB}=\overline{AD}$.

$$\begin{cases}x=-2\\ y=3x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=-6\end{cases},\ \text{portanto } A(-2,-6)$$

A reta BC é paralela ao eixo Oy, logo é uma reta vertical, e como $B(4,2)$, então $x=4$.

O Ponto C pertence à reta $x=4$, e á mediatriz de $[BD]$.

$$\begin{cases}x=4\\ y=3x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=12\end{cases},\ \text{portanto } C(4,12)$$

1.3. Mostre que a medida da altura do paralelogramo $[ABCD]$ relativamente à base $[AB]$ é igual a 6.

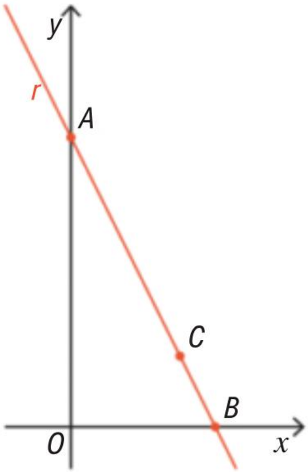
Um losango é paralelogramo.

Assim, $A_{[ABCD]}=\underbrace{\dfrac{D\times d}{2}}_{\text{Área losango}}=\underbrace{\overline{AB}\times h}_{\text{Área paralelogramo}}$, em que $D=\overline{AC}$, $d=\overline{BD}$ e h é a altura do paralelogramo relativamente à base $\overline{AB}$

$$D=\overline{AC}=\sqrt{(4+2)^2+(12+6)^2}=\sqrt{360}=6\sqrt{10}$$
$$d=\overline{BD}=\sqrt{(-2-4)^2+(4-2)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$
$$\overline{AB}=\overline{AD}=|4+6|=10$$
$$A_{\text{Losango}}=\frac{6\sqrt{10}\times2\sqrt{10}}{2}=6\times10=60$$
$$A_{\text{Paralelogramo}}=10\times h$$

Então, $A_{\text{Losango}}=A_{\text{Paralelogramo}}\Leftrightarrow 60=10h\Leftrightarrow h=6$

2. Na figura estão representados, num referencial o.n. Oxy, uma reta r e três pontos, A, B e C, que lhe pertencem.



Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo Oy e tem ordenada 8;
- o ponto B pertence ao eixo Ox;
- o ponto C tem coordenadas $(3,2)$.

2.1. Mostre que o ponto B tem coordenadas $(4,0)$.

$r: \ y = mx + 8$

$m_r = \dfrac{8-2}{0-3} = \dfrac{6}{-3} = -2$

$r: \ y = -2x + 8$

Como B pertence ao eixo Ox, então, $B(x,0)$, isto é, $-2x+8=0 \Leftrightarrow x=4$

$\therefore \ B(4,0)$ c.q.m.

2.2. Determine a equação reduzida da reta perpendicular a $[AB]$ e que passa no ponto de coordenadas $(2,4)$.

$\left(\dfrac{0+4}{2}, \dfrac{8+0}{2}\right) = (2,4)$, logo, $(2,4)$ é ponto médio de $[AB]$.

Assim, a reta pedida é a mediatriz de $[AB]$

Seja $P(x,y)$ um ponto da mediatriz de $[AB]$

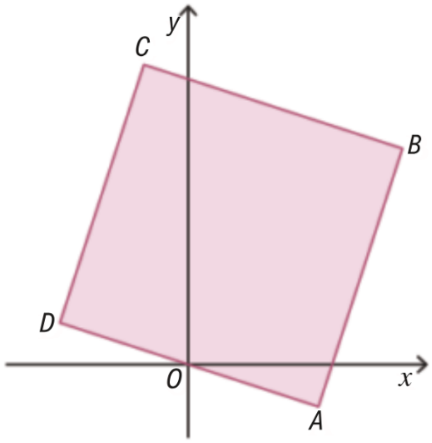
$d(A,P) = d(B,P) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-8)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 16y + 64 = \cancel{x^2} - 8x + 16 + \cancel{y^2} \Leftrightarrow -16y = -8x - 48 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{2}x + 3$

3. No referencial o.n. Oxy da figura, está representado o losango $[ABCD]$

Sabe-se que:

- os pontos A e C têm coordenadas $(3,-1)$ e $(-1,7)$, respetivamente;
- o ponto B pertence à bissetriz dos ímpares.



3.1. Determine uma equação da mediatriz do segmento de reta $[AC]$.

Seja $P(x,y)$ um ponto da mediatriz do segmento de reta $[AC]$.

$$d(A,P)=d(C,P) \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y-7)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x^2}-6x+9+\cancel{y^2}+2y+1=\cancel{x^2}+2x+1+\cancel{y^2}-14y+49 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2y+14y=6x+2x-10+50 \Leftrightarrow 16y=8x+40 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

3.2. Determine as coordenadas do ponto B.

Como $[ABCD]$ é um losango, então $\overline{BA}=\overline{BC}$, logo B pertence à mediatriz de $[AC]$.

Sabemos que B pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, logo B pertence à reta $y=x$

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=x+5 \\ \_\_\_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=5 \end{cases}, \text{ portanto } B(5,5)$$

3.3. Mostre que o losango é um quadrado.

Já sabemos que os lados do quadrilátero são todos iguais porque $[ABCD]$ é losango.

Temos que provar que os ângulos do quadrilátero são retos.

Para tal temos que provar que o Teorema de Pitágoras é válido para, por exemplo, o triângulo $[ABC]$

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$$

$$\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{(5-3)^2+(5+1)^2}=\sqrt{40}$$

$$\overline{AC}^2=\sqrt{(-1-3)^2+(7+1)^2}=\sqrt{80}$$

$$\text{Portanto, } \left(\sqrt{40}\right)^2+\left(\sqrt{40}\right)^2=\left(\sqrt{80}\right)^2 \Leftrightarrow 40+40=80 \Leftrightarrow 80=80$$

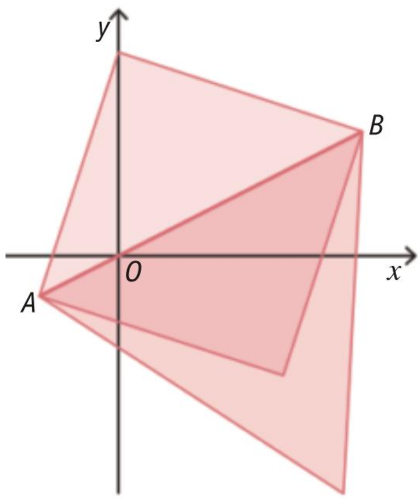
Logo, o ângulo ABC é reto.

Por definição de paralelogramo, um losango é um paralelogramo, os ângulos adjacentes são suplementares e os ângulos opostos são iguais, assim, concluímos que os quatro ângulos internos de $[ABCD]$ são retos.

Portanto, $[ABCD]$ é um quadrado.

4. No referencial o.n. Oxy, da figura, estão representados os pontos $A(-2,-1)$ e $B(6,3)$.

Sabe-se que $[ABC]$ é um triângulo isósceles em que $\overline{AC}=\overline{BC}$.



4.1. Determine a equação reduzida da mediatriz do segmento de reta $[AB]$.

Seja $P(x,y)$ um ponto da mediatriz de $[AB]$

$d(A,P)=d(B,P)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-6)^2+(y-3)^2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2}+4x+4+\cancel{y^2}+2y+1=\cancel{x^2}-12x+36+\cancel{y^2}-6y+9\Leftrightarrow$

$2y+6y=-4x-12x-5+45\Leftrightarrow 8y=-16x+40\Leftrightarrow y=-2x+5$

4.2. Determine as coordenadas do ponto C sabendo que:

a) pertence ao eixo Oy;

$C(0,y)$, porque C pertence a Oy

Como $\overline{AC}=\overline{BC}$ então C pertence a $y=-2x+5$

$y=-2\times 0+5\Leftrightarrow y=5$

$C(0,5)$

b) tem ordenada -3.

$C(x,-3)$

Como $\overline{AC}=\overline{BC}$ então C pertence a $y=-2x+5$

$-2x+5=-3\Leftrightarrow -2x=-8\Leftrightarrow x=4$

$C(4,3)$

4.3. Determine a área do triângulo $[ABC]$, sabendo que C pertence à bissetriz dos quadrantes pares.

Como C pertence à bissetriz dos quadrantes pares, então C pertence às retas

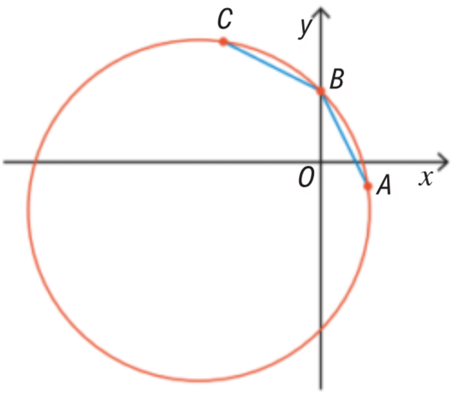
$$\begin{cases} y=-x \\ y=-2x+5 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=-x \\ -x=-2x+5 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=-x \\ x=5 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y=-5 \\ x=5 \end{cases},\quad C(5,-5)$$

Seja M ponto médio de $[AB]$, $M\left(\frac{-2+6}{2},\frac{-1+3}{2}\right)=(2,1)$

$$A_{[ABC]}=\frac{\overline{AB}\times\overline{MC}}{2}=\frac{\left(\sqrt{(-2-6)^2+(-1-3)^2}\right)\times\left(\sqrt{(2-5)^2+(1+5)^2}\right)}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{64+16}\times\sqrt{9+36}}{2}=\frac{\sqrt{80}\times\sqrt{45}}{2}=\frac{\sqrt{3600}}{2}=\frac{60}{2}=30$$

5. Na figura está representada, num referencial o.n. *Oxy*, a circunferência que passa nos pontos A, B e C de coordenadas $(2,-1)$, $(0,3)$ e $(-4,5)$, respetivamente.



5.1. Determine a equação reduzida da mediatriz da corda:

a) $[AB]$;

Seja $P(x,y)$ um ponto da mediatriz de $[AB]$

$(x-2)^2+(y+1)^2=x^2+(y-3)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2}-4x+4+\cancel{y^2}+2y+1=\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-6y+9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2y+6y=4x-5+9 \Leftrightarrow 8y=4x+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

b) $[BC]$.

Seja $P(x,y)$ um ponto da mediatriz de $[BC]$

$x^2+(y-3)^2=(x+4)^2+(y-5)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2}+\cancel{y^2}-6y+9=\cancel{x^2}+8x+16+\cancel{y^2}-10y+25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6y+10y=8x-9+41 \Leftrightarrow 4y=8x+32 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=2x+8$

5.2. Determine as coordenadas do centro da circunferência representada.

O centro da circunferência é o ponto de interseção das mediatrizes dos segmentos de reta $[AB]$ e $[BC]$

$$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \\ y=2x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+8=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \\ y=2x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+16=x+1 \\ y=2x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=-15 \\ y=2x+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=2\times(-5)+8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=-2 \end{cases}, \quad D(-5,-2)$$

$$r=\overline{DB}=\sqrt{(-5)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$$

5.3. Seja M o ponto médio de $[AB]$.

Determine a equação reduzida da circunferência cujo centro é um ponto do eixo Ox e tangente à reta AB no ponto M.

$$M\left(\frac{2+0}{2},\frac{-1+3}{2}\right)=(1,1)$$

Seja E o centro da circunferência, que é a interseção do mediatriz de $[AB]$ com o eixo Ox.

$$\begin{cases} y=0 \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ 0=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ 0=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-1 \end{cases} \quad , \quad E(-1,0)$$

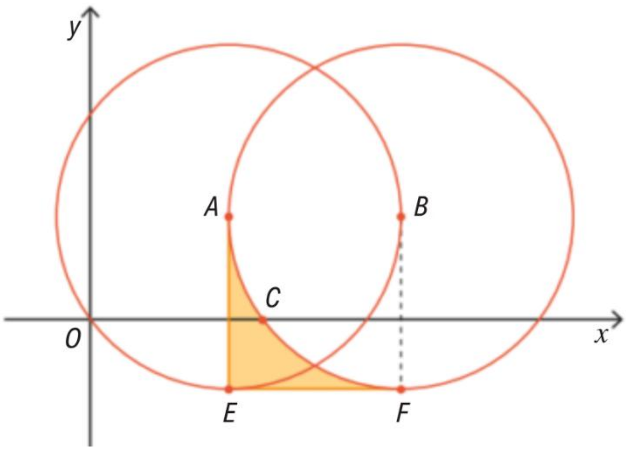
Como é tangente à reta AB então $r=\overline{EM}=\sqrt{(1+1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{5}$

Equação da cirunferência: $(x+1)^2+y^2=5$

6. Na figura estão representadas, num referencial o.n. Oxy, duas circunferências com igual raio cujos centros são os pontos A e B.

Sabe-se que:

- a circunferência de centro A passa no ponto B e pode ser definida pela equação $(x-4)^2+(y-3)^2=25$;
- os pontos A e B têm a mesma ordenada;
- C é o ponto de interseção da circunferência de centro B com o eixo Ox e que tem abcissa menor que a abcissa de B;
- E e F são pontos das circunferências, com ordenada negativa e com as mesmas abcissas dos pontos A e B, respetivamente.



6.1. Determine as coordenadas dos pontos E e F.

A abcissa de E é 4. Substituindo na equação da circunferência de centro A.

$$(4-4)^2+(y-3)^2=25 \Leftrightarrow y-3=\sqrt{25} \vee y-3=-\sqrt{25} \Leftrightarrow y=8 \vee y=-2 \underset{y<0}{\Leftrightarrow} y=-2$$

$E(4,-2)$

Como A e B têm a mesma ordenada, temos que E e F também têm a mesma ordenada. Logo $F(x,-2)$

Sabemos que $\overline{EF}=\overline{AB}=r=5$, então $F(x_E+5,-2)=(4+5,-2)=(9,-2)$

6.2. Verifique a abcissa de C é igual ao raio das circunferências.

Por **6.1.**, como B tem a mesma abcissa de F e como A e B têm a mesma ordenada, $B(9,3)$

A equação reduzida da circunferência de centro B é $(x-9)^2+(y-3)^2=25$

C pertence à circunferência e ao eixo Ox

Assim, $\begin{cases}(x-9)^2+(y-3)^2=25\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-9)^2+(0-3)^2=25\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-9)^2=25-9\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-9)^2=16\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-9=-4\\ y=0\end{cases} \vee \begin{cases}x-9=4\\ y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5\\ y=0\end{cases} \vee \begin{cases}x=13\\ y=0\end{cases}$

Como a abcissa de C é menor do que a abcissa de F então $C(5,0)$

6.3. Determine o valor exato da região colorida da figura.

$$A_{\substack{\text{Região}\\ \text{colorida}}} = A_{[AEFB]} - \frac{1}{4}A_{\text{círculo}} = 5^2 - \frac{1}{4}\times\pi\times 5^2 = 25 - \frac{25\pi}{4}$$

7. Considere num referencial o.n. Oxy, as circunferências:

- C_1, de centro no ponto A e raio r_1, definida pela equação $(x+6)^2+(y-1)^2=5$;
- C_2, de centro no ponto B e raio r_2, definida pela equação $(x-2)^2+(y+3)^2=20$
- C_3, de diâmetro $[AB]$.

7.1. Determine a equação reduzida da reta AB.

$A(-6,1)$ e $B(2,-3)$

$m_{AB}=\frac{1+3}{-6-2}=\frac{4}{-8}=-\frac{1}{2}$

$1=-\frac{1}{2}\times(-6)+b \Leftrightarrow b=1-3 \Leftrightarrow b=-2$

$y=-\frac{1}{2}x-2$

7.2. Determine a distância entre A e B e verifique se as circunferências C_1 e C_2 se intersetam.

$A(-6,1)$ e $B(2,-3)$

$\overline{AB}=\sqrt{(-6-2)^2+(1+3)^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

$r_1+r_2=\sqrt{5}+\sqrt{20}=\sqrt{5}+2\sqrt{5}=3\sqrt{5}$

Como $\overline{AB}>r_1+r_2$, isto é, a distância entre os centros é maior do que a soma dos raios, podemos concluir que C_1 e C_2 não se intersetam.

7.3. Determine a equação reduzida da circunferência C_3.

O centro de C_3 é o ponto médio de $[AB]$

$M\left(\frac{-6+2}{2},\frac{1-3}{2}\right)=(-2,-1)$

Raio: $r_3=\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{4\sqrt{5}}{2}=2\sqrt{5}$

$C_3:\ (x+2)^2+(y+1)^2=\left(2\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y+1)^2=20$

7.4. Mostre que o centro da circunferência C_3 pertence à circunferência C_2.

$M(-2,-1)$ e $C_2:(x-2)^2+(y+3)^2=20$

$(-2-2)^2+(-1+3)^2=20 \Leftrightarrow 16+4=20 \Leftrightarrow 20=20$, logo, $M\in C_2$

8. Num plano munido de um referencial o.n. Oxy, considere duas circunferências, C_1 e C_2 de centros A e B, respetivamente.

Sabe-se que:

- C_1 fica definida pela equação reduzida $(x-3)^2+(y-6)^2=13$;
- C_2 fica definida pela equação $x(x+6)+y^2=16$.

8.1. Justifique que o ponto $C(1,3)$ é um ponto de interseção das duas circunferências.

$C(1,3)$

$C_1:(1-3)^2+(3-6)^2=13 \Leftrightarrow 4+9=13 \Leftrightarrow 13=13$, logo $C\in C_1$

$C_2:1\times(1+6)+3^2=16 \Leftrightarrow 7+9=16 \Leftrightarrow 16=16$, logo $C\in C_2$

Como C pertence às duas circunferências, podemos concluir que C é um ponto de interseção das duas circunferências.

8.2. Seja $P(x,y)$ um ponto da mediatriz de $[AB]$. Prove que $x+y=3$.

Centro de C_1: $A(3,6)$

$C_2:\ x(x+6)+y^2=16 \Leftrightarrow x^2+6x+y^2=16 \Leftrightarrow x^2+6x+3^2-3^2+y^2=16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+3)^2+y^2=16+9 \Leftrightarrow (x+3)^2+y^2=25$, então centro de C_2: $B(-3,0)$

Se $P(x,y)$ é um ponto da mediatriz de $[AB]$, então:

$d(A,P)=d(B,P) \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y-6)^2}=\sqrt{(x+3)^2+y^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2}-6x+9+\cancel{y^2}-12y+36=\cancel{x^2}+6x+9+\cancel{y^2} \Leftrightarrow$

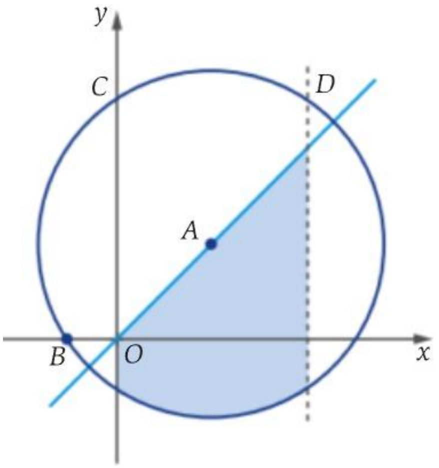
$\Leftrightarrow -12y-6x-6x=-45+9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -12y-12x=-36 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y+x=3$ c.q.m.

9. Na figura está representada, num referencial o.n. *Oxy*, uma circunferência centrada em *A*, de raio $\sqrt{13}$ e que contém o ponto *B*. Sabe-se que:

- o ponto *A* pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares;
- $B(-1,0)$;
- o ponto *C* pertence ao eixo *Oy* e à circunferência;
- o ponto *D* pertence à circunferência e tem a mesma ordenada que o ponto *C*.



9.1. Mostre que uma equação da circunferência é $(x-2)^2+(y-2)^2=13$.

O ponto *A* pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, $y=x$, e ao primeiro quadrante, logo as coordenadas do ponto *A* são do tipo $\underbrace{(x_A,x_A)}_{y=x}$, com $x_A>0$.

Sabemos que *B* pertence à circunferência e tem coordenadas $(-1,0)$, então $d(A,B)=\sqrt{13}$.

$$d(A,B)=\sqrt{13}\Leftrightarrow\sqrt{(x_A+1)^2+x_A^2}=\sqrt{13}\Leftrightarrow x_A^2+2x_A+1+x_A^2=13\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x_A^2+2x_A-12=0\Leftrightarrow x_A=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times2\times(-12)}}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_A=-3\vee x_A=2\underset{x_A>0}{\Leftrightarrow}x_A=2$$

Pelo que $A(2,2)$

Portanto uma equação da circunferência é $(x-2)^2+(y-2)^2=13$ c.q.m.

9.2. Mostre que as coordenadas do ponto *D* são $(4,5)$.

Comecemos por determinar as coordenadas de *C*, uma vez que *D* tem a mesma ordenada.

Como *C* pertence ao semieixo positivo *Oy*, então $C(0,y_C)$, com $y_C>0$.

Como *C* pertence à circunferência, então:

$$(0-2)^2+(y_C-2)^2=13\Leftrightarrow4+(y_C-2)^2=13\Leftrightarrow(y_C-2)^2=9\Leftrightarrow y_C-2=\pm3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_C=-3+2\vee y_C=3+2\Leftrightarrow y_C=-1\vee y_C=5\underset{y_C>0}{\Leftrightarrow}y_C=5$$

Assim, $C(0,5)$

Como *D* tem a mesma ordenada de *C* e pertence à circunferência, temos que:

$$(x_D-2)^2+(5-2)^2=13\Leftrightarrow(x_D-2)^2+9=13\Leftrightarrow(x_D-2)^2=4\Leftrightarrow x_D-2=\pm2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_D=-2+2\vee x_D=2+2\Leftrightarrow x_D=0\vee x_D=4\underset{x_D>0}{\Leftrightarrow}x_D=4$$

$\therefore\ D(4,5)$

9.3. Determine uma equação da mediatriz do segmento de reta $[AD]$, apresentando-a na forma $y = mx + b$, com $m, b \in IR$.

Seja, $P(x, y)$ um ponto da mediatriz de $[AD]$, então:

$(x-2)^2 + (y-2)^2 = (x-4)^2 + (y-5)^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2} - 4x + 4 + \cancel{y^2} - 4y + 4 = \cancel{x^2} - 8x + 16 + \cancel{y^2} - 10y + 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4y + 10y = 4x - 8x - 8 + 41 \Leftrightarrow 6y = -4x + 33 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{2}$

9.4. Seja $P(a, a^2 + 4a)$, com $a \in IR$, um ponto do segundo quadrante pertencente à reta CD. Mostre que P pertence à bissetriz dos quadrantes pares.

A reta CD é $y = 5$.

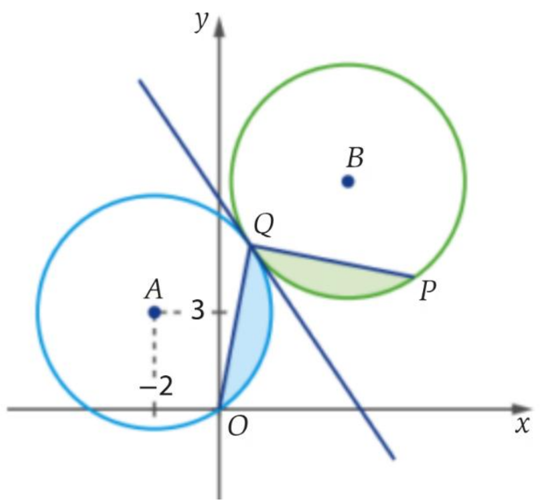
Como P pertence à reta CD, temos que:

$a^2 + 4a = 5 \Leftrightarrow a^2 + 4a - 5 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times (-5)}}{2} \Leftrightarrow a = -5 \vee a = 1$

Como $P \in 2.^{\text{o}} Q$, então a abcissa de P é negaviva, logo $P(-5, 5)$.

Portanto P pertence à bissetriz dos quadrantes pares, $y = -x$

10. Na figura estão representadas, num referencial o.n. Oxy, a reta r e duas circunferências, uma centrada no ponto A e que contém a origem, O, e outra, de equação $(x-4)^2 + (y-7)^2 = 13$, centrada em B.



Sabe-se que:

- $A(-2, 3)$;
- o ponto Q pertence às duas circunferências e tem ordenada 5;
- o ponto P pertence à circunferência centrada em B e tem abcissa 6;
- a reta r é tangente às duas circunferências no ponto Q.

10.1. Escreva uma condição que defina a circunferência centrada em A e mostra que a abcissa do ponto Q é 1.

$A(-2, 3)$ é centro da circunferência.

$(x+2)^2 + (y-3)^2 = r^2$

Como O pertence à circunferência então $r = d(A, O) = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$\therefore \ (x+2)^2 + (y-3)^2 = 13$

Como o ponto Q tem ordenada 5 e pertence às duas circunferências, temos que:

$$(x-4)^2+(5-7)^2=13 \Leftrightarrow (x-4)^2+4=13 \Leftrightarrow (x-4)^2=9 \Leftrightarrow x-4=\pm 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=-3+4 \vee x=3+4 \Leftrightarrow x=1 \vee x=7$$

Como $B(4,7)$ e, pela observação da figura, $x_Q < x_B$, então $Q(1,5)$

10.2. Justifique que $\overline{AQ}=\overline{BQ}$ e escreva uma equação da reta r, apresentando-a na forma $y=mx+b$, com $m, b \in IR$.

$$\overline{AQ}=\overline{BQ} \Leftrightarrow \sqrt{(-2-1)^2+(3-5)^2}=\sqrt{(4-1)^2+(7-5)^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{9+4}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}=\sqrt{13} \qquad (\text{Proposição verdadeira})$$

Como a reta r é tangente às duas circunferências no ponto Q, então r é a mediatriz do segmento de reta $[AB]$.

Seja $P(x,y)$ um ponto da mediatriz do segmento de reta $[AB]$.

$$(x+2)^2+(y-3)^2=(x-4)^2+(y-7)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cancel{y^2}+4x-4+\cancel{y^2}-6y+9=\cancel{x^2}-8x+16+\cancel{y^2}-14y+49 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -6y+14y=-4x-8x-5+16+49 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8y=-12x+60 \Leftrightarrow y=-\frac{3}{2}x+\frac{15}{2}$$

10.3. Mostre que o triângulo $[AOQ]$ é retângulo em A e, usando este facto, determine o valor exato da área da região sombreada a azul.

Os pontos Q e O pertencem à circunferência centrada em A e de raio $\sqrt{13}$, logo $\overline{AO}=\overline{AQ}=\sqrt{13}$.

O triângulo é retângulo em A se:

$$\overline{AQ}^2+\overline{AO}^2=\overline{OQ}^2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{13}\right)^2+\left(\sqrt{13}\right)^2=\left(\sqrt{1^2+5^2}\right)^2 \Leftrightarrow 13+13=\left(\sqrt{1+25}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 16=\left(\sqrt{26}\right)^2 \Leftrightarrow 26=26 \qquad (\text{Proposição verdadeira})$$

Portanto $[AOQ]$ é retângulo em A.

$$A_{\text{azul}}=A_{\frac{1}{4}\odot}-A_{[AOQ]}=\frac{1}{4}\pi\times\left(\sqrt{13}\right)^2-\frac{\sqrt{13}\times\sqrt{13}}{2}=\frac{13}{4}\pi-\frac{13}{2}=\frac{13\pi-26}{4}$$

10.4. Mostre que as coordenadas de P são $(6,4)$ e justifique que as áreas das regiões sombreadas a azul e verde são iguais.

Como P tem abcissa 6 e pertence à circunferência centrada em B:

$$(6-4)^2+(y-7)^2=13 \Leftrightarrow 4+(y-7)^2=13 \Leftrightarrow (y-7)^2=9 \Leftrightarrow y-7=\pm 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y=7-3 \vee y=7+3 \Leftrightarrow y=4 \vee y=10$$

Como $B(4,7)$ e, pela observação da figura, $y_P < y_B$, então, $P(6,4)$

$$\overline{PQ}=\sqrt{(1-6)^2+(5-4)^2}=\sqrt{26}$$

Como o raio da circunferência centrada em B também é $\sqrt{13}$, temos, de forma análoga a **10.3** que $[QBP]$ também é retângulo em B.

$$A_{\text{verde}}=A_{\frac{1}{4}\odot}-A_{[QBP]}=\frac{1}{4}\pi\times\left(\sqrt{13}\right)^2-\frac{\sqrt{13}\times\sqrt{13}}{2}=\frac{13}{4}\pi-\frac{13}{2}=\frac{13\pi-26}{4}=A_{\text{azul}}$$

11. Num plano munido de um referencial o.n. Oxy, considere os pontos $A(6,-1)$, $B(3,2)$ e $C(-1,4)$.

Escreva uma equação da circunferência que contém os pontos A , B e C .

A interseção das mediatrizes dos segmentos de reta $[AB]$ e $[BC]$ é o centro da circunferência que contém os três pontos.

Mediatriz de $[AB]$:

$$r:\ (x-6)^2+(y+1)^2=(x-3)^2+(y-2)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cancel{x^2}-12x+36+\cancel{y^2}+2y+1=\cancel{x^2}-6x+9+\cancel{y^2}-4y+4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2y+4y=12x-6x-37+13 \Leftrightarrow 6y=6x-24 \Leftrightarrow y=x-4$$

Mediatriz de $[BC]$:

$$s:\ (x-3)^2+(y-2)^2=(x+1)^2+(y-4)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cancel{x^2}-6x+9+\cancel{y^2}-4y+4=\cancel{x^2}+2x+1+\cancel{y^2}-8y+16 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4y+8y=6x+2x-13+17 \Leftrightarrow 4y=8x+4 \Leftrightarrow y=2x+1$$

Portanto o centro da circunferência é:

$$\begin{cases} y=x-4 \\ y=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=x-4 \\ y=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=2\times(-5)+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=-9 \end{cases},$$ então o centro é $(-5,-9)$

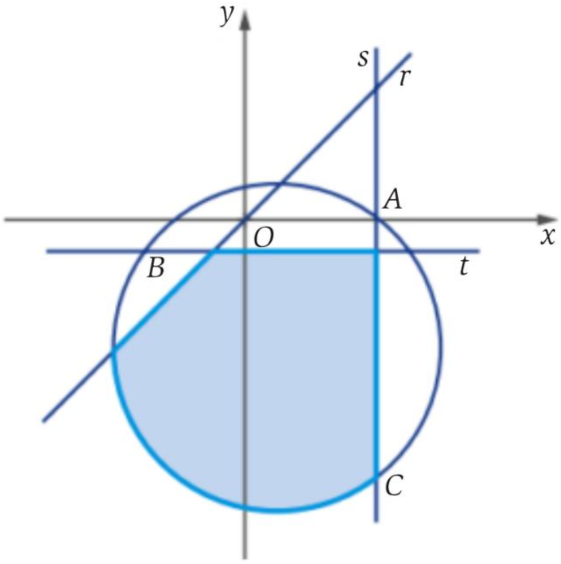
Assim o raio é igual a, por exemplo, $d(A,D)$

$$d(A,D)=\sqrt{(-5-6)^2+(-9+1)^2}=\sqrt{121+64}=\sqrt{185}$$

Portanto a equação reduzida da circunferência é:

$$(x+5)^2+(y+9)^2=185$$

12. Na figura estão representadas, num referencial o.n. Oxy, as retas r , s e t e a circunferência definida pela equação $2x^2+2y^2-4x+16y-16=0$.



Sabe-se que:

- a reta r é a bissetriz dos quadrantes ímpares;
- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox, à circunferência e à reta s ;
- o ponto B pertence à circunferência e à reta t , tem abcissa -3 e a sua ordenada é maior que a ordenada do centro da circunferência;
- o ponto C pertence à circunferência e à reta s ;
- a reta t é paralela ao eixo Ox e a reta s é paralela ao eixo Oy.

12.1. Mostre que as coordenadas do centro da circunferência são $(1,-4)$ e que o seu raio é 5.

$$2x^2+2y^2-4x+16y-16=0 \Leftrightarrow 2x^2-4x+2y^2-16y=16 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\left(x^2-2x\right)+2\left(y^2+8y\right)=16 \underset{\div 2}{\Leftrightarrow} x^2-2x+y^2-8y=8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1^2-1^2+y^2+8y+4^2-4^2=8 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+4)^2=1+16+8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+4)^2=25$$

Logo, $(1,-4)$ é o centro da circunferência e o raio é $\sqrt{25}=5$

12.2. Determine as coordenadas do ponto A e mostre que as coordenadas dos pontos B e C são, respetivamente, $(-3,-1)$ e $(4,-8)$.

A pertence ao semieixo positivo Ox, logo as coordenadas de A são do tipo $(x_A,0)$, com $x_A>0$, sabemos que o ponto pertence à circunferência.

Assim, $(x_A-1)^2+(0+4)^2=25 \Leftrightarrow (x_A-1)^2+16=25 \Leftrightarrow (x_A-1)^2=9 \Leftrightarrow x_A-1=\pm 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_A=-3+1 \vee x_A=3+1 \Leftrightarrow x_A=-2 \vee x_A=4 \underset{x_A>0}{\Leftrightarrow} x_A=4$

$\therefore\ A(4,0)$

B tem abcissa igual a -3, logo as coordenadas de B são do tipo $(-3,y_B)$, com $y_B>-4$, a ordenada de B é maior do que a ordenada do centro da circunferência.

Como B também pertence à circunferência, então:

$(-3-1)^2+(y_B+4)^2=25 \Leftrightarrow 16+(y_B+4)^2=25 \Leftrightarrow (y_B+4)^2=9 \Leftrightarrow y_B+4=\pm 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y_B=-3-4 \vee y_B=3-4 \Leftrightarrow y_B=-7 \vee y_B=-1 \underset{y_B>-4}{\Leftrightarrow} y_B=-1$

$\therefore\ B(-3,-1)$

C tem a abcissa igual à de A, logo as coordenadas de C são do tipo $(4, y_C)$, com $y_C < -4$, a ordenada de C é menor do que a ordenada do centro da circunferência.

Como C também pertence à circunferência, então:

$$(4-1)^2 + (y_C + 4)^2 = 25 \Leftrightarrow 9 + (y_C + 4)^2 = 25 \Leftrightarrow (y_C + 4)^2 = 16 \Leftrightarrow y_C + 4 = \pm 4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y_C = -4 - 4 \vee y_C = 4 - 4 \Leftrightarrow y_C = -8 \vee y_B = 0 \underset{y_B < -4}{\Leftrightarrow} y_C = -8$$

$\therefore \; C(4, -8)$

12.3. Determine uma equação da mediatriz do segmento de reta $[BC]$, apresentando-a na forma $y = mx + b$, com $m, b \in IR$.

$B(-3,-1)$ e $C(4,-8)$

Seja $P(x, y)$ um ponto da mediatriz de $[BC]$

$$(x+3)^2 + (y+1)^2 = (x-4)^2 + (y+8)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cancel{x^2} + 6x + 9 + \cancel{y^2} + 2y + 1 = \cancel{x^2} - 8x + 16 + \cancel{y^2} + 16y + 64 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2y - 16y = -6x - 8x - 10 + 80 \Leftrightarrow -14y = -14x + 70 \Leftrightarrow y = x - 5$$

12.4. Seja P um ponto do plano cuja abcissa excede em duas unidades o dobro da ordenada.

Determine as coordenadas do ponto P de modo que $d(P, C) = 9$

Como a abcissa do ponto P excede em duas unidades o dobro da ordenada, então as coordenadas do ponto são do tipo $(2y+2, y)$.

Assim, como $d(P, C) = 9$, temos:

$$\sqrt{(2y+2-4)^2 + (y+8)^2} = 9 \Leftrightarrow (2y-2)^2 + (y+8)^2 = 81 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4y^2 - 8y + 4 + y^2 + 16y + 64 - 81 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5y^2 + 8y - 13 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \times 5 \times (-13)}}{10} \Leftrightarrow y = -\frac{13}{5} \vee y = 1$$

Portanto:

- se $y = -\frac{13}{5} \Rightarrow P\left(2 \times \left(-\frac{13}{5}\right) + 2, -\frac{13}{5}\right) = \left(-\frac{16}{5}, -\frac{13}{5}\right)$
- se $y = 1 \Rightarrow P(2 \times 1 + 2, 1) = (4, 1)$

13. Considere, num referencial o.n. Oxy, os pontos A e B do 1.º quadrante, em que:

- a ordenada do ponto A é o dobro da sua abcissa;
- a bissetriz dos quadrantes ímpares é a mediatriz de $[AB]$;
- $\overline{AB}=4$.

Determine as coordenadas de A e B.

Como A e B pertencem ao 1.º quadrante, então as coordenadas dos sois pontos são positivas.

Sabemos que a ordenada de A é o dobro da sua abcissa, logo, as coordenadas de A são do tipo $(x_A, 2x_A)$, com $x_A>0$

Sabemos que $y=x$ é a mediatriz de $[AB]$.

Assim, $(x-x_A)^2+(y-2x_A)^2=(x-x_B)^2+(y-y_B)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2}-2xx_A+x_A^2+\cancel{y^2}-4yx_A+4x_A^2=\cancel{x^2}-2xx_B+x_B^2+\cancel{y^2}-2yy_B+y_B^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4yx_A+2yy_B=2xx_A-2xx_B-5x_A^2+x_B^2+y_B^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2y_B-4x_A)y=(2x_A-2x_B)x-5x_A^2+x_B^2+y_B^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{2x_A-2x_B}{2y_B-4x_A}x+\dfrac{-5x_A^2+x_B^2+y_B^2}{2y_B-4x_A}$

Como $y=x$, então:
$m=1$ e $b=0$

Assim, $\begin{cases}\dfrac{2x_A-2x_B}{2y_B-4x_A}=1\\ \dfrac{-5x_A^2+x_B^2+y_B^2}{2y_B-4x_A}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x_A-2x_B=2y_B-4x_A\\ -5x_A^2+x_B^2+y_B^2=0 \wedge 2y_B-4x_A\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}6x_A=2x_B+2y_B\\ 5x_A^2=x_B^2+y_B^2=0 \wedge 2y_B-4x_A\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_A=\dfrac{x_B+y_B}{3} & (\mathrm{I})\\ 5x_A^2=x_B^2+y_B^2=0 \wedge 2y_B-4x_A\neq 0\end{cases}$

Sabemos, também, que $\overline{AB}=4$, então:

$\overline{AB}=4 \Leftrightarrow \sqrt{(x_A-x_B)^2+(2x_A-y_B)^2}=4 \Leftrightarrow (x_A-x_B)^2+(2x_A-y_B)^2=16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_A^2-2x_Ax_B+x_B^2+4x_A^2-4x_Ay_B+y_B^2=16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x_A^2-2x_Ax_B+x_B^2-4x_Ay_B+y_B^2=16 \qquad (\mathrm{II})$

O ponto médio de $[AB]$ pertence à mediatriz, logo:

$M_{[AB]}=\left(\dfrac{x_A+x_B}{2},\dfrac{2x_A+y_B}{2}\right)$, como a mediatriz é $y=x$, temos $\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{2x_A+y_B}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x_A=-x_B+y_B \Leftrightarrow x_A=x_B-y_B$

Substituindo por (I) temos $\dfrac{x_B+y_B}{3}=x_B-y_B \Leftrightarrow x_B+y_B=3x_B-3y_B \Leftrightarrow x_B=2y_B$

Como $x_B = 2y_B$, voltando a substituir em (I) temos $x_A = \dfrac{2y_B + y_B}{3} \Leftrightarrow x_A = y_B$

Como $x_B = 2y_B$ e $x_A = y_B$, substituindo em (II) $\left(5x_A^2 - 2x_A x_B + x_B^2 - 4x_A y_B + y_B^2 = 16\right)$temos:

$5y_B^2 - 2y_B\left(2y_B\right) + \left(2y_B\right)^2 - 4y_B y_B + y_B^2 = 16 \Leftrightarrow 5y_B^2 - \cancel{4y_B^2} + 4\cancel{4y_B^2} - 4y_B^2 + y_B^2 = 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2y_B^2 = 16 \Leftrightarrow y_B^2 = 8 \Leftrightarrow y_B = 2\sqrt{2}$

Assim, $\underbrace{x_A = 2\sqrt{2}}_{x_A = y_B}$, $\underbrace{x_B = 2\times 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x_B = 4\sqrt{2}}_{x_B = 2y_B}$ e $\underbrace{y_A = 2\times 2\sqrt{2} \Leftrightarrow y_A = 4\sqrt{2}}_{\text{A ordenada do } A \text{ é o dobro da sua abcissa}}$

$\therefore \quad A\left(2\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right)$ e $B\left(4\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$

14. Num referencial o.n. Oxy, considere os ponto A e B de coordenadas $(1,1)$ e $(-2,4)$, respetivamente, e a circunferência de equação $x^2 + (y-2)^2 = 13$.

A mediatriz do segmento de reta $[AB]$ interseta a circunferência em dois pontos, P e Q.

Qual é o valor de $d(P,Q)$?

Equação da mediatriz de $[AB]$:

Seja $P(x,y)$ um ponto da mediatriz, então $(x-1)^2 + (y-1)^2 = (x+2)^2 + (y-4)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} - 2y + 1 = \cancel{x^2} + 4x + 4 + \cancel{y^2} - 8y + 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2y + 8y = 2x + 4x - 2 + 20 \Leftrightarrow 6y = 6x + 18 \Leftrightarrow y = x + 3$

Interseção de $y = x + 3$ com a circunferência $x^2 + (y-2)^2 = 13$:

$x^2 + (x+3-2)^2 = 13 \Leftrightarrow x^2 + (x+1)^2 = 13 \Leftrightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 = 13 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow$

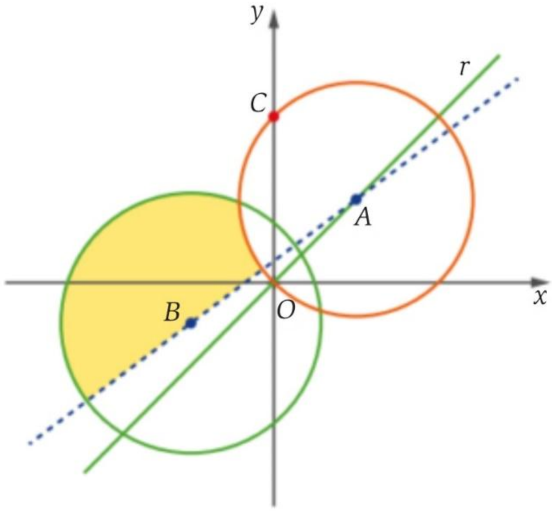
$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow\Leftrightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\times(-6)}}{2} \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 2$

$P(-3, y_P)$; $y_P = -3 + 3 = 0 \Rightarrow P(-3, 0)$

$Q(2, y_Q)$; $y_Q = 2 + 3 = 5 \Rightarrow Q(2, 5)$

$\therefore \; d(P,Q) = \sqrt{(-3-2)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

15. Na figura, estão representados, num referencial o.n. Oxy, duas circunferências, a reta r, bissetriz dos quadrantes ímpares, e a reta AB, a tracejado.



Sabe-se que:

- uma das circunferências está centrada no ponto A e contem a origem do referencial;
- a outra circunferência está centrada no ponto B e é definida pela equação $(x+2)^2+(y+1)^2=10$;
- o ponto A ao primeiro quadrante e à reta r;
- o ponto C pertence à circunferência centrada em A e ao semieixo positivo Oy;
- $\overline{AO}=2\sqrt{2}$.

15.1. Mostre que as coordenadas do ponto A são $(2,2)$ e escreva uma equação da circunferência centrada nesse ponto.

A pertence à reta r, bissetriz dos quadrantes ímpares, $y=x$, logo $A(x_A, x_A)$, $x_A>0$, porque A pertence ao primeiro quadrante.

$\overline{AO}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(x_A-0)^2+(x_A-0)^2}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow x_A^2+x_A^2=8 \Leftrightarrow 2x_A^2=8 \Leftrightarrow x_A^2=4 \Leftrightarrow x_A=\pm 2 \Leftrightarrow$

$\underset{x_A>0}{\Leftrightarrow} x_A=2$

$\therefore\ A(2,2)$

15.2. Mostre que as coordenadas do ponto C são $(0,4)$.

$C(0,y_C)$, $y_C>0$, como C pertence à circunferência, centrada em A, $(x-2)^2+(y-2)^2=(2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=8$

Assim, $(0-2)^2+(y_C-2)^2=8 \Leftrightarrow 4+(y_C-2)^2=8 \Leftrightarrow (y_C-2)^2=4 \Leftrightarrow y_C-2=\pm 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y_C=2-2 \vee y_C=2+2 \Leftrightarrow y_C=0 \vee y_C=4 \underset{y_C>0}{\Leftrightarrow} y_C=4$

$\therefore\ C(0,4)$

15.3. Seja s a mediatriz do segmento de reta $[BC]$.

a) Mostre que uma equação da reta s é $10y+4x=11$.

$B(-2,-1)$ e $C(0,4)$

Seja $P(x,y)$ um ponto da mediatriz de $[BC]$, então:

$(x+2)^2+(y+1)^2=x^2+(y-4)^2 \Leftrightarrow \cancel{x^2}+4x+4+\cancel{y^2}+2y+1=\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-8y+16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2y+8y+4x=-5+16 \Leftrightarrow 10y+4x=11$ c.q.m.

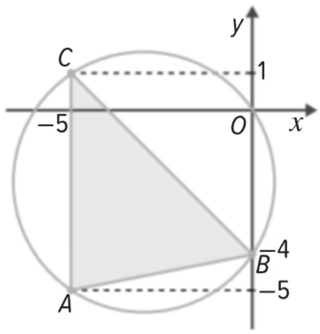
b) Determine os valores reais de a de modo que o ponto de coordenadas $\left(2a^2+\frac{3}{4}, a+1\right)$ pertença à reta s.

$10(a+1)+4\left(2a^2+\frac{3}{4}\right)=11 \Leftrightarrow 10a+10+8a^2+3-11=0 \Leftrightarrow 8a^2+10a+2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4a^2+5a+1=0 \Leftrightarrow a=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times4\times1}}{8} \Leftrightarrow a=-1 \vee a=-\dfrac{1}{4}$

16. No referencial o.n. Oxy, o triângulo $[ABC]$ está inscrito na circunferência, sendo $A(-5,-5)$, $B(0,-4)$ e $C(-5,1)$.

Determine a equação reduzida da circunferência circunscrita ao triângulo.



Mediatriz de $[AC]$: reta horizontal, igual ao ponto médio de $[AC]$, isto é, $\left(\frac{-5-5}{2}, \frac{-5+1}{2}\right)=$

$=(-5,-2)$, logo $y=-2$ é a mediatriz.

Mediatriz de $[BC]$: $(x-0)^2+(y+4)^2=(x+5)^2+(y-1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{x^2}+\cancel{y^2}+8y+16=\cancel{x^2}+10x+25+\cancel{y^2}-2y+1 \Leftrightarrow$

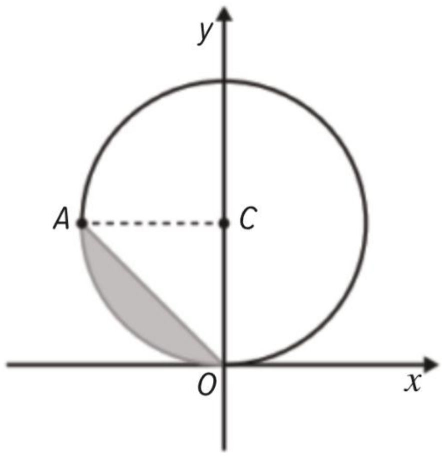
$\Leftrightarrow 8y+2y=10x-16+26 \Leftrightarrow 10y=10x+10 \Leftrightarrow y=x+1$

Seja D o centro da circunferência, $\begin{cases} y=-2 \\ y=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ -2=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=-3 \end{cases}$, logo, $D(-3,-2)$

Raio: $r=\overline{BD}=\sqrt{(0+3)^2+(-4+2)^2}=\sqrt{13}$

$\therefore (x+3)^2+(y+2)^2=13$

17. Num referencial o.n. Oxy, estão representados o segmento de reta $[AO]$ e uma circunferência de centro $C(0,2)$ e que passa em $A(-2,2)$.



17.1. Seja P o perímetro da região sombreada.

Mostre que $5,9 < P < 6$.

$$\overline{AO} = \sqrt{(-2-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$P_{\frac{1}{4}\odot} = \frac{2\pi r}{4} = \frac{2\pi \times 2}{4} = \pi$$

$$P_{\substack{\text{Região}\\\text{sombreada}}} = 2\sqrt{2} + \pi \approx 5,97$$

$$\therefore\ 5,9 < 2\sqrt{2} + \pi < 6$$

17.2. Mostre que a medida da área da região sombreada é igual a $(\pi - 2)$.

$$A_{\substack{\text{Região}\\\text{sombreada}}} = A_{\frac{1}{4}\odot} - A_{[AOC]} = \frac{2^2\pi}{4} - \frac{2\times 2}{2} = \pi - 2$$