1. Escreva uma equação vetorial e a equação reduzida da reta r :

1.1. que passa no ponto $P(-1,-2)$ e que tem a direção do vetor $\vec{u}(1,3)$;

Uma equação vetorial de r é $(x,y)=(-1,-2)+k(1,3), k\in IR$

Como $\vec{u}(1,3)$ então, $m=3$

$y=3x+b \Rightarrow -2=3\times(-1)+b \Leftrightarrow b=1$

Uma equação reduzida da reta é $y=3x+1$

1.2. que passa no ponto $R(5,-7)$ e é paralela ao eixo das abcissas ;

Como a reta é paralela ao eixo das abcissas um vetor diretor é $\vec{v}(1,0)$

Uma equação vetorial da reta r é $(x,y)=(5,-7)+k(1,0), k\in IR$

Como a reta r é paralela ao eixo das abcissas então a equação reduzida é $y=-7$

1.3. que passa nos pontos $A(2,3)$ e $B(4,-1)$;

$m=\dfrac{-1-3}{4-2}=-2$

$y=-2x+b \Rightarrow 3=-2\times 2+b \Leftrightarrow b=7$

Uma equação reduzida é $y=-2x+7$

Como $m=-2$ e $\vec{v}(1,m)$ então, $\vec{v}(1,-2)$

Uma equação vetorial é $(x,y)=(2,3)+k(1,-2), k\in IR$

2. Considere, num plano munido de um referencial cartesiano as retas r e s definidas por:

$$r:\ 3x+ay+2=0\ ,\ \text{com}\ a\in IR\setminus\{0\} \quad \text{e} \quad s:\ (x,y)=(1,2)+k(-4,5), k\in IR$$

Determine o valor de a , de forma que a reta r :

2.1. passe no ponto $A(2,-1)$;

$3\times 2+a\times(-1)+2=0 \Leftrightarrow -a=-8 \Leftrightarrow a=8$

2.2. tenha declive 3 ;

$3x+ay+2=0 \Leftrightarrow y=-\dfrac{3}{a}x-\dfrac{2}{a}$

Como $m=3$, então, $-\dfrac{3}{a}=3 \Leftrightarrow -\dfrac{a}{3}=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow -a=\dfrac{3}{3} \Leftrightarrow a=-1$

2.3. seja paralela à reta s .

Para ser paralela à reta s os declives das duas retas têm que ser iguais.

Como o vetor diretor de s é $\vec{v}(-4,5)$, então, $m=-\frac{5}{4}$

Logo, $-\frac{3}{a}=-\frac{5}{4} \Leftrightarrow \frac{a}{3}=\frac{4}{5} \Leftrightarrow a=\frac{12}{5}$

3. Considere, num determinado referencial o.n. Oxy , os pontos $A(2,-1)$, $B(0,1)$ e $C(1,2)$.

3.1. Escreva uma equação vetorial:

a) da reta AB ;

$\overrightarrow{AB}=B-A=(0,1)-(2,-1)=(-2,2)$

Portanto uma reta vetorial da reta AB é $(x,y)=(0,1)+k(-2,2),\ k \in IR$

b) da semirreta $\dot{A}B$

A semirreta tem que começar no ponto $A(2,-1)$ e tem que ter o sentido do vetor $\overrightarrow{AB}$

Logo uma equação da semirreta é $(x,y)=(2,-1)+k(-2,2),\ k \in IR^+$

c) do segmento $[AB]$.

$(x,y)=(0,1)+k(-2,2),\ k \in [0,1]$

3.2. Verifique se o ponto C pertence à reta AB .

$(1,2)=(0,1)+k(-2,2) \Leftrightarrow 1=-2k \wedge 2=1+2k \Leftrightarrow k=-\frac{1}{2} \wedge k=\frac{1}{2}$

Como $-\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}$ o ponto C não pertence à reta AB

4. Lançou-se um projétil, que seguiu uma trajetória retilínea, da posição A de coordenadas $(3,1)$, segundo a direção do vetor $\vec{u}(4,5)$ e que acertou no centro do alvo cuja abcissa é 23.

Qual é a ordenada da posição do centro do alvo?

Temos $(23,y)=(3,1)+k(4,5)$, $k \in IR$

$23=3+4k \wedge y=1+5k \Leftrightarrow k=5 \wedge y=1+5\times5 \Leftrightarrow k=5 \wedge y=26$

Logo a ordenada da posição do centro do alvo, com abcissa 23, é 26.

5. Considere, num plano munido de um referencial o.n. Oxy , as retas r e s , definidas por:

$$r:\ y=2x+3 \ \text{ e } \ s:(x,y)=(3,-3)+k(2,-1),\ k\in IR$$

5.1. Determine as coordenadas do ponto de interseção da reta r com a bissetriz dos quadrantes pares.

Bissetriz dos quadrantes pares: $y=-x$

$r: y=2x+3 \underset{y=-x}{\Leftrightarrow} -x=2x+3 \Leftrightarrow -3x=3 \Leftrightarrow x=-1$

Para $x=-1$, temos, $y=-1\times 2+3=1$

O ponto tem coordenadas $(-1,1)$

5.2. Determine as coordenadas do ponto de interseção da reta s com a bissetriz dos quadrantes ímpares.

Bissetriz dos quadrantes ímpares: $y=x$

$s:(x,y)=(3,-3)+k(2,-1),\ k\in IR$

Então, $(x,y)=(3+2k,-3-k) \underset{y=x}{\Leftrightarrow} (x,x)=(3+2k,-3-k) \Leftrightarrow x=3+2k \wedge x=-3-k \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3+2k=-3-k \Leftrightarrow 3k=-6 \Leftrightarrow k=-2$$

Assim, $(x,y)=(3+2\times(-2),-3-(-2)) \Leftrightarrow (x,y)=(-1,-1)$

5.3. Escreva uma equação vetorial da reta r .

$m=2$, então um vetor diretor de r é $\vec{r}(1,2)$

Como $(-1,1)$ pertence à reta, uma equação vetorial de r é

$$(x,y)=(-1,1)+k(1,2),\ k\in IR$$

5.4. Escreva uma equação vetorial da reta s .

O vetor diretor de s é $\vec{s}(2,-1)$, então o declive é $m=-\dfrac{1}{2}$

Como $(3,-3)$ pertence à reta, $-3=-\dfrac{1}{2}\times 3+b \Leftrightarrow b=-\dfrac{3}{2}$

Logo uma equação reduzida da reta é

$$y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$$

5.5. Seja P o ponto de interseção das retas r e s. Determine as coordenadas do ponto de interseção.

$$\begin{cases} y=2x+3 \\ y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=2x+3 \\ y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x-3=4x+6 \\ y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x=9 \\ y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{9}{5} \\ y=-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{9}{5}\right)-\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{9}{5} \\ y=-\frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\therefore P\left(-\frac{9}{5},-\frac{3}{5}\right)$$

5.6. Seja P o ponto referido na alínea anterior. Sejam R e S, respetivamente, os pontos de interseção das retas r e s com o eixo Ox. Determine a área do triângulo $[PRS]$.

Interseção de r com o eixo das abcissas:

$$2x+3=0 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$$

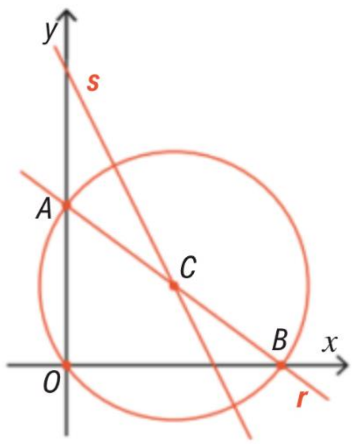
Interseção de s com o eixo das abcissas:

$$-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}=0 \Leftrightarrow -x-3=0 \Leftrightarrow x=-3$$

$$A_{[PRS]}=\frac{\overline{x_R x_S}\times|y_P|}{2}=\frac{\left|-\frac{3}{2}+3\right|\times\frac{3}{5}}{2}=\frac{\frac{3}{2}\times\frac{3}{5}}{2}=\frac{9}{20}$$

6. Na figura estão representadas, num referencial o.n. Oxy:

- a reta r, definida pela equação $(x,y)=(-4,9)+k(4,-3),\ k\in IR$ que interseta os eixos Oy e Ox nos pontos A e B, respetivamente;
- a reta s definida pela equação $y=-2x+11$, que interseta a reta r no ponto C;
- a circunferência E que passa na origem do referencial e cujo centro é o ponto C.



6.1. Determine as coordenadas de A e B.

Ponto A:

$$(0,y)=(-4,9)+k(4,-3) \Leftrightarrow 0=-4+4k \wedge y=9-3k \Leftrightarrow k=1 \wedge y=9-3\times1 \Leftrightarrow k=1 \wedge y=6$$

$A(0,6)$

Ponto B:

$$(x,0)=(-4,9)+k(4,-3) \Leftrightarrow x=-4+4k \wedge 0=9-3k \Leftrightarrow x=4-4\times2 \wedge k=3 \Leftrightarrow x=8 \wedge y=6$$

$B(8,0)$

6.2. Mostre que C tem coordenadas $(4,3)$.

Qualquer ponto da reta r tem coordenadas $(x,y)=(-4+4k,9-3k)$

Como C é a interseção de r com s, então substituindo na reta s temos:

$y=-2x+11$

$9-3k=-2(-4+4k)+11 \Leftrightarrow -3k+8k=-9+19 \Leftrightarrow k=2$

Portanto $C(-4+4\times2,9-3\times2)=(4,3)$ c.q.m.

6.3. Defina a circunferência E pela equação reduzida.

$C(4,3)$ e raio $=\overline{OC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

Portanto a equação reduzida da circunferência é:

$$(x-4)^2+(y-3)^2=25$$

6.4. Mostre que $[AB]$ é um diâmetro da circunferência E .

Comecemos por verificar se os pontos A e B pertencem à circunferência:

$A(0,6)$

$(0-4)^2+(6-3)^2=25 \Leftrightarrow 16+9=25 \Leftrightarrow 25=25$, então A pertence à circunferência.

$B(8,0)$

$(8-4)^2+(0-3)^2=25 \Leftrightarrow 25=25$, então B pertence à circunferência.

Se o ponto médio de $[AB]$ for igual a C , então $[AB]$ é um diâmetro da circunferência.

$M\left(\frac{0+8}{2},\frac{6+0}{2}\right)=(4,3)$, logo $M=C$, e portanto $[AB]$ é um diâmetro da circunferência.

6.5. Defina a reta r pela equação reduzida e a reta s por uma equação vetorial.

Reta r:

$(x,y)=(-4,9)+k(4,-3),\ k\in IR$

$m=-\frac{3}{4}$

$9=-\frac{3}{4}\times(-4)+b \Leftrightarrow b=6$

$y=-\frac{3}{4}x+6$

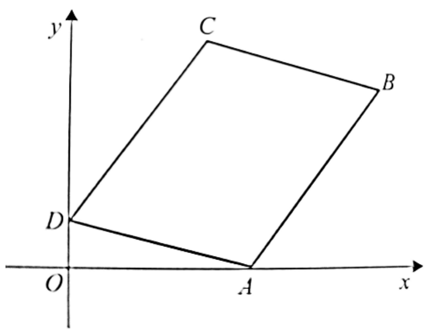
Reta s:

$y=-2x+11$

$\vec{s}=(1,-2)$

$(x,y)=(0,11)+k(1,-2),\ k\in IR$

7. Na figura está representado, num referencial o.n. Oxy, o paralelogramo $[ABCD]$.



Sabe-se que:

- o ponto C tem coordenadas $(3,5)$;
- os pontos A e D pertencem aos eixos Ox e Oy, respetivamente;
- a reta AB é definida por $4x-3y=16$.

7.1. Escreva uma equação vetorial da reta AB.

$4x-3y=16 \Leftrightarrow -3y=-4x+16 \Leftrightarrow y=\frac{4}{3}x-\frac{16}{3}$

$m=\frac{4}{3}$, então, o vetor diretor da reta é $\vec{v}(3,4)$

O ponto $\left(0,-\frac{16}{3}\right)$ pertence à reta

Portanto, $AB:(x,y)=\left(0,-\frac{16}{3}\right)+k(3,4),\ k\in IR$

7.2. Determina uma equação reduzida de AD.

A reta CD é paralela a AB, logo tem o mesmo declive e C pertence à reta CD.

Assim, $5=\frac{4}{3}\times 3+b \Leftrightarrow b=1$

Portanto $D(0,1)$

O ponto A pertence ao eixo Ox, então $4x-3\times 0=16 \Leftrightarrow x=4$

Portanto $A(4,0)$

Assim, $m=\frac{0-1}{4-0}=-\frac{1}{4}$

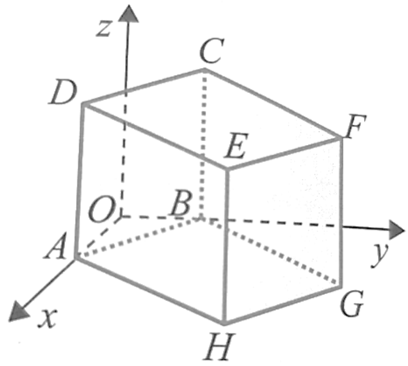
$\therefore\ AD: y=-\frac{1}{4}x+1$

7.3. Determine as coordenadas do ponto B.

$B=A+\overrightarrow{AB}=A+\overrightarrow{DC}=(4,0)+(3,4)=(7,4)$

$\boxed{\text{C.A.: } \overrightarrow{DC}=C-D=(3,5)-(0,1)=(3,4)}$

8. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um paralelepípedo retângulo $[ABCDEFGH]$.



Sabe-se que:

- o vértice A pertence ao eixo Ox e o vértice B pertence ao eixo Oy;
- a reta AD é paralela ao eixo Oz;
- o vértice G tem coordenadas $(6,11,0)$;
- $\|\overrightarrow{AD}\|=6$;
- a reta AB é definida pela equação:

$$(x,y,z)=(0,3,0)+k(-4,3,0)\,,\ k\in IR$$

8.1. Determine o volume do paralelepípedo.

Como $AB:(x,y,z)=(0,3,0)+k(-4,3,0)\,,\ k\in IR$

Então, $B(0,3,0)$

As coordenadas do ponto A são:

$x=-4k \wedge y=3+3k \wedge z=0$, com $y=0 \Leftrightarrow 3+3k=0 \Leftrightarrow k=-1$

$x=4 \wedge y=0 \wedge z=0$

$A(4,0,0)$

$A_{[ABCDEFGH]}=\overline{AB}\times\overline{BG}\times\overline{AD}$

$\overrightarrow{AB}=B-A=(0,3,0)-(4,0,0)=(-4,3,0)$, assim, $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(-4)^2+3^2+0^2}=5$

$\overrightarrow{BG}=G-B=(6,11,0)-(0,3,0)=(6,8,0)$, assim, $\|\overrightarrow{BG}\|=\sqrt{6^2+8^2+0^2}=10$

$A_{[ABCDEFGH]}=5\times10\times6=300$

8.2. Determine as coordenadas do ponto P de interseção da reta CG com o plano Oxz.

$C(0,3,6)$ e $G(6,11,0)$

$\overrightarrow{CG}=G-C=(6,11,0)-(0,3,6)=(6,8,-6)$

Assim, uma equação vetorial de CG é

$$(x,y,z)=(0,3,6)+k(6,8,-6)\,,\ k\in IR$$

No plano Oxz a ordenada é nula, logo:

$(x,y,z)=(0,3,6)+k(6,8,-6)\,,\ k\in IR$

$x=6k \wedge y=3+8k \wedge z=6-6k$, como, $y=0$

$\Leftrightarrow x=6k \wedge 0=3+8k \wedge z=6-6k \Leftrightarrow x=6k \wedge k=-\frac{3}{8} \wedge z=6-6k$

$\Leftrightarrow x=6\times\left(-\frac{3}{8}\right) \wedge k=-\frac{3}{8} \wedge z=6-6\times\left(-\frac{3}{8}\right) \Leftrightarrow x=-\frac{9}{4} \wedge k=-\frac{3}{8} \wedge z=\frac{33}{4}$

Logo o ponto de interseção é $\left(-\frac{9}{4},0,\frac{33}{4}\right)$

8.3. Seja r a reta paralela a AF e que contém o ponto H.

Determine as coordenadas do ponto Q de interseção da reta r com o plano Oyz.

$F(6,11,6)$

$\overrightarrow{AF} = F - A = (6,11,6)-(4,0,0)=(2,11,6)$

$H = G+\overrightarrow{GH} = G+\overrightarrow{BA} = G-\overrightarrow{AB} = (6,11,0)-(-4,3,0)=(10,8,0)$

Como r é paralela a AF tem o mesmo vetor diretor e como passa no ponto H, uma equação vetorial de r é

$$(x,y,z)=(10,8,0)+k(2,11,6)\,,\ k\in IR$$

Assim, Q, ponto de interseção da reta r com o plano Oyz:

$(x,y,z)=(10,8,0)+k(2,11,6)\,,\ k\in IR$

$x=10+2k \wedge y=8+11k \wedge z=6k$, com, $x=0$

$0=10+2k \wedge y=8+11k \wedge z=6k \Leftrightarrow k=-5 \wedge y=8+11\times(-5) \wedge z=6\times(-5) \Leftrightarrow$

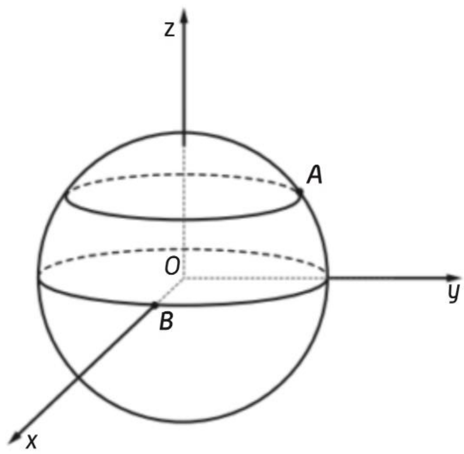
$\Leftrightarrow k=-5 \wedge y=-47 \wedge z=-30$

Portanto, $Q(0,-47,-30)$

9. Considere o referencial o.n. $Oxyz$, onde está representada a superfície esférica de equação

$$x^2+y^2+z^2-25=0$$

Sabe-se que B é o ponto de interseção do semieixo positivo Ox com a superfície esférica.



9.1. Determine uma equação vetorial da reta paralela ao eixo Oz e que passa por B.

Como B pertence ao semieixo positivo Ox, então as coordenadas de B são do tipo $(x_B,0,0),\ x_B>0$ e, como

B pertence à superfície esférica então $x_B{}^2+0^2+0^2-25=0 \Leftrightarrow x_B{}^2=25 \Leftrightarrow x_B=\pm5 \underset{x_B>0}{\Leftrightarrow} x_B=5$

Um vetor diretor da reta é $\vec{v}(0,0,1)$, porque a reta é paralela ao eixo das cotas.

Portanto uma equação vetorial da reta é

$$(x,y,z)=(5,0,0)+k(0,0,1),\ k\in IR$$

9.2. Considere a circunferência de raio 4 obtida pela interseção do plano $z=k$, $k\in IR^{+}$, com a superfície esférica.

Seja A o ponto de interseção da circunferência referida com o plano Oyz e que tem coordenadas não negativas,

Determine:

a) o valor de k;

Seja $C(x,y,z)$ o centro da circunferência.

Então $\underbrace{\overline{OA}}_{\substack{\text{raio}\\\text{superfície}\\\text{esférica}}}{}^2=\underbrace{\overline{AC}}_{\substack{\text{raio}\\\text{circunferência}}}{}^2+\underbrace{\overline{OC}}_{k}{}^2 \Leftrightarrow 5^2=4^2+k^2 \Leftrightarrow k^2=9 \Leftrightarrow k=\pm 3 \underset{k>0}{\Leftrightarrow} k=3$

b) as coordenadas do ponto A;

O ponto A pertence ao plano Oyz então as coordenadas são do tipo $(0,y_A,z_A)$, $y_A,z_A\in IR^{+}$

Como $z=3$ a circunferência obtida pela interseção do plano com a superfície esférica é $x^2+y^2=16 \wedge z=3$.

A pertence à circunferência e à superfície esférica, logo:

$$0^2+y_A{}^2=16 \wedge z_A=3 \Leftrightarrow y_A=\pm 4 \wedge z_A=3 \underset{y_A>0}{\Leftrightarrow} y_A=4 \wedge z_A=3$$

Portanto $A(0,4,3)$

c) uma equação vetorial da reta AB.

$A(0,4,3)$ e $B(5,0,0)$

$\overrightarrow{AB}=B-A=(5,0,0)-(0,4,3)=(5,-4,-3)$

Portanto uma equação vetorial da reta AB é

$$(x,y,z)=(5,0,0)+k(5,-4,-3),\ k\in IR$$

10. Considere, num plano munido de um referencial o.n. Oxy, a reta r definida por

$$(x,y)=(3,-6)+k(3,-2)\ ,\ \ k\in IR$$

10.1. Verifique se cada um dos pontos $R(12,-12)$ e $S(-15,4)$ pertence à reta r.

$$(12,-12)=(3,-6)+k(3,-2) \Leftrightarrow 12=3+3k \wedge -12=-6-2k \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k=3 \wedge k=3$$

Logo, $R\in r$

$$(-15,4)=(3,-6)+k(3,-2) \Leftrightarrow -15=3+3k \wedge 4=-6-2k \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k=-6 \wedge k=-5$$

Logo, $S\notin r$

10.2. Sejam A e B os pontos de interseção da reta r com os eixos Ox e Oy, respetivamente.

Sabe-se que $[AB]$ é uma corda de uma circunferência cujo centro pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Escreva uma equação que defina essa circunferência.

Coordenadas do ponto A:

$$(x,0)=(3,-6)+k(3,-2)\Leftrightarrow x=3+3k\wedge 0=-6-2k\Leftrightarrow x=3+3\times(-3)\wedge k=-3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-6\wedge k=-3\text{ , então, } A(-6,0)$$

Coordenadas do ponto B:

$$(0,y)=(3,-6)+k(3,-2)\Leftrightarrow 0=3+3k\wedge y=-6-2k\Leftrightarrow k=-1\wedge y=-6-2\times(-1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k=-1\wedge y=-4\text{ , então, } B(0,-4)$$

Como a mediatriz de qualquer corda de uma circunferência passa pelo centro desta, então a interseção da mediatriz com a bissetriz dos quadrantes ímpares é o centro da circunferência.

Mediatriz de $[AB]$:

$$(x+6)^2+y^2=x^2+(y+4)^2\Leftrightarrow \cancel{x^2}+12x+36+\cancel{y^2}=\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+8y+16\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -8y=-12x-20\Leftrightarrow y=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$$

Interseção da mediatriz de $[AB]$ com a bissetriz dos quadrantes ímpares:

$$\begin{cases} y=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2} \\ y=x \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2} \\ y=x \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=3x+5 \\ y=x \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=-5 \end{cases}$$

$C(-5,-5)$

Raio da circunferência:

$$r=\overline{AC}=\sqrt{(-5+6)^2+(5-0)^2}=\sqrt{26}$$

Portanto a equação da circunferência é:

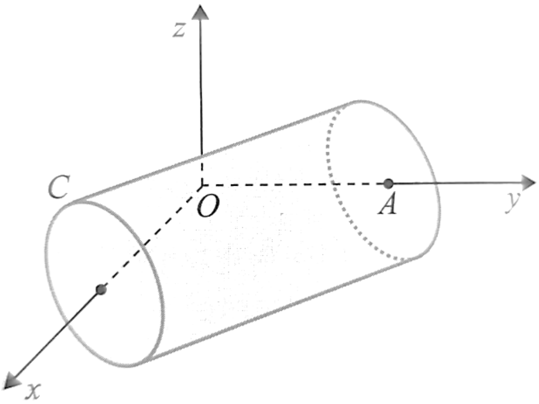
$$(x+5)^2+(y+5)^2=26$$

11. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um cilindro reto.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo Oy e é o centro de uma das bases do cilindro, e o ponto B pertence ao eixo Ox e é o centro da outra base;
- o ponto C pertence à circunferência de centro em B que delimita uma das bases do cilindro;
- a reta AB é definida pela equação:

$$(x,y,z)=(10,-4,0)+k(5,-4,0)\ ,\ k\in IR$$



Determine:

11.1. $\overline{BC}$, sabendo que o volume do cilindro é $\sqrt{1025}\pi$ u.v.

$$V_{\text{cilindro}}=\overline{BC}^2\times\pi\times\overline{AB}\Leftrightarrow\overline{BC}^2=\frac{\sqrt{1025}\,\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}\times\overline{AB}}$$

A pertence a Oy, então, $x=0\wedge z=0$

$$(x,y,z)=(10,-4,0)+k(5,-4,0)\Leftrightarrow x=10+5k\wedge y=-4-4k\wedge z=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\underbrace{0=10+5k}_{x=0}\wedge y=-4-4k\wedge z=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\underbrace{k=-2}_{x=0}\wedge y=-4-4\times(-2)\wedge z=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\underbrace{k=-2}_{x=0}\wedge y=4\wedge z=0\Leftrightarrow$$

$\therefore A(0,4,0)$

B pertence a Ox, então, $y=0\wedge z=0$

$$(x,y,z)=(10,-4,0)+k(5,-4,0)\Leftrightarrow x=10+5k\wedge y=-4-4k\wedge z=0\Leftrightarrow$$
$$\underset{y=0}{\Leftrightarrow}x=10+5k\wedge 0=-4-4k\wedge z=0\Leftrightarrow$$
$$\underset{x=0}{\Leftrightarrow}k=10-5\wedge k=-1\wedge z=0\Leftrightarrow$$
$$\underset{x=0}{\Leftrightarrow}x=5\wedge k=-1\wedge z=0\Leftrightarrow$$

$\therefore B(5,0,0)$

$\overrightarrow{AB}=B-A=(5,0,0)-(0,4,0)=(5,-4,0)$, então, $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{5^2+(-4)^2}=\sqrt{41}$

De, $\overline{BC}^2=\dfrac{\sqrt{1025}}{\overline{AB}}\Leftrightarrow\overline{BC}^2=\dfrac{5\cancel{\sqrt{41}}}{\cancel{\sqrt{41}}}\underbrace{\Leftrightarrow}_{\overline{BC}>0}\overline{BC}=\sqrt{5}$

11.2. As coordenadas de um ponto P, pertencente à reta AB, tal que $\left\|\overrightarrow{AP}\right\|=2\sqrt{41}$

Como P pertence à reta AB, então as coordenadas de P são do tipo:

$$(x,y,z)=(10+5k,-4-4k,0)$$

Então, $\overrightarrow{AP}=P-A=(10+5k,-4-4k,0)-(0,4,0)=(10+5k,-8-4k,0)$

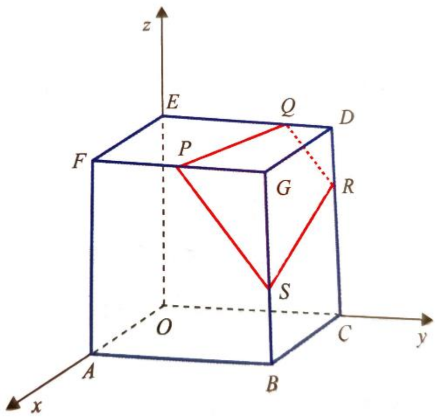
Como, $\left\|\overrightarrow{AP}\right\|=2\sqrt{41}$, então:

$$\sqrt{(10+5k)^2+(-8-4k)^2}=2\sqrt{41}\Leftrightarrow(5k+10)^2+(-4k-8)^2=\left(2\sqrt{41}\right)^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 25k^2+100k+100+16k^2+64k+64=164\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 41k^2+164k=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k(41k+164)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k=0\vee 41k=-164\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow k=0\vee k=-4$$

Se $k=0$, então, $P(10,-4,0)$

Se $k=-4$, então, $P(10+5\times(-4),-4-4\times(-4),0)=(-10,12,0)$

12. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o cubo $[OABCDEFG]$.



Sabe-se que:

- um dos vértices do cubo coincide coma origem do referencial;
- os vértices A, C e E pertencem aos eixos Ox, Oy e Oz, respetivamente.
- o volume do cubo é 512 u.v. ;
- P é o ponto médio da aresta $[FG]$;
- Q pertence à aresta $[ED]$ e tem ordenada 6 ;
- S pertence à aresta $[BG]$ e tem cota 3 ;
- R pertence à aresta $[DC]$;
- a reta PS e a reta QR são paralelas.

12.1. Determine as coordenadas do ponto R.

$V_{\text{Cubo}} = 512 \Leftrightarrow l^3 = 512 \Leftrightarrow l = 8 <$

Como P é ponto médio de $[FG]$, então, $P(8,4,8)$

Q pertence à aresta $[ED]$ e tem ordenadas 6, então, $Q(0,6,8)$

S pertence à aresta $[BG]$ tem cota 3 , então, $S(8,8,3)$

$\overrightarrow{PS} = S - P = (8,8,3) - (8,4,8) = (0,4,-5)$

Como as retas PS e QR são paralelas então $\overrightarrow{PS}$ é vetor diretor da reta QR

Assim, $QR: (x,y,y) = (0,6,8) + k(0,4,-5)\ , k \in IR$

Como R pertence à aresta $[CD]$ então $C(0,8,z_C)$

Logo qualquer ponto de QR tem coordenadas $(x,y,z) = (0,6+4k,8-5k), k \in IR$

Assim, $x = 0 \wedge y = 6+4k \wedge z = 8-5k \Leftrightarrow 0 = 0 \wedge 8 = 6+4k \wedge z = 8-5k \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0 = 0 \wedge k = \frac{1}{2} \wedge z = 8 - 5\times\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0 \wedge k = \frac{2}{5} \wedge z = \frac{11}{2}$$

Portanto, $R\left(0,8,\frac{11}{2}\right)$

12.2. Seja I o ponto de interseção da reta PS com o plano Oxy .

Determine a área do triângulo $[AEI]$.

Uma equação vetorial da reta PS é

$(x,y,z)=(8,8,3)+k(0,4,-5),\ k\in IR$

Qualquer ponto do plano Oxy tem cota 0.

$(x,y,z)=(8,8,3)+k(0,4,-5),\ k\in IR$

$(x,y,z)=(8,8+4k,3-5k)$, como $z=0$, então, $3-5k=0 \Leftrightarrow k=\frac{3}{5}$

Portanto, I, a interseção da reta PS com o plano Oxy é,

$I(x,y,z)=\left(8,8+4\times\frac{3}{5},0\right)=\left(8,\frac{52}{5},0\right)$

Assim, $A_{[AEI]}=\frac{\overline{AE}\times\overline{AI}}{2}$

$\overrightarrow{AE}=E-A=(0,0,8)-(8,0,0)=(-8,0,8)$, e, $\left\|\overrightarrow{AE}\right\|=\sqrt{(-8)^2+\left(8^2\right)}=8\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AI}=I-A=\left(8,\frac{52}{5},0\right)-(8,0,0)=\left(0,\frac{52}{5},0\right)$, e, $\left\|\overrightarrow{AI}\right\|=\sqrt{\left(\frac{52}{5}\right)^2}=\frac{52}{5}$

$A_{[AEI]}=\frac{8\sqrt{2}\times\frac{52}{5}}{2}=\frac{208\sqrt{2}}{5}$ u.a.

13. Seja a e b dois números reais positivos.

Num referencial o.n. Oxy, considere:

- a reta r de equação reduzida $y = ax + b$, $a, b \in IR^+$;
- a reta s definida por $(x, y) = (0, b) + k(2, -a)$, $k \in IR$;
- A é o ponto de interseção da reta r com o eixo das abcissas;
- B é o ponto de interseção das retas r e s;
- C é o ponto de interseção da reta s com o eixo das abcissas.

13.1. Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ pode ser dada, em função de a e de b, por $\dfrac{3b^2}{2a}$

$$A_{[ABC]} = \frac{\overline{AC} \times |y_B|}{2}$$

A tem coordenadas $(x_A, 0)$ e pertence à reta r, então:

$ax_A + b = 0 \Leftrightarrow x_A = -\dfrac{b}{a}$, logo, $A\left(-\dfrac{b}{a}, 0\right)$

C tem coordenadas $(x_C, 0)$ e pertence à reta s, então:

$$(x_C, 0) = (0, b) + k(2, -a) \Leftrightarrow x_C = 2k \wedge 0 = b - ka \Leftrightarrow x_C = 2k \wedge k = \frac{b}{a} \Leftrightarrow x_C = \frac{2b}{a} \wedge k = \frac{b}{a}$$

Assim, $\overline{AC} = |x_C - x_A| = \left|\dfrac{2b}{a} - \left(-\dfrac{b}{a}\right)\right| = \left|\dfrac{3b}{a}\right| = \dfrac{3b}{a}$, $a, b \in IR^+$

Coordenadas do ponto B, interseção das retas r e s:

$(x, y) = (0, b) + k(2, -a)$, $k \in IR$

$\begin{cases} x = 2k \\ y = b - ka \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{x}{2} \\ y = b - \dfrac{x}{2}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{x}{2} \\ y = -\dfrac{x}{2}a + b \end{cases}$, então, $y = -\dfrac{a}{2}x + b$ é a equação reduzida da reta s

Assim, B:

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = -\dfrac{a}{2}x + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{a}{2}x + b = ax + b \\ y = -\dfrac{a}{2}x + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -ax = 2ax \\ y = -\dfrac{a}{2}x + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3ax = 0 \\ y = -\dfrac{a}{2}x + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = b \end{cases}$$

Portanto, $A_{[ABC]} = \dfrac{\overline{AC} + |y_B|}{2} = \dfrac{\dfrac{3b}{a} \times b}{2} = \dfrac{3b^2}{2a}$ c.q.m.

13.2. Determine o perímetro do triângulo $[ABC]$, admitindo que este triângulo tem área igual a 48 e que o vetor $\vec{u}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$. é paralelo a um dos lados.

$A_{[ABC]}=48 \Leftrightarrow \frac{3b^2}{2a}=48$

Como $\vec{u}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ é paralelo a um dos lados, consideremos que o vetor $\vec{u}$ é paralelo à reta s.

Assim, $\vec{u}=k\vec{v} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)=k(2,-a) \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{4}=2k\\ \frac{1}{2}=-ak\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=\frac{1}{8}\\ \frac{1}{2}=-a\times\frac{1}{8}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=\frac{1}{8}\\ a=-4\end{cases}$

De $a=-4$, temos, $\frac{3b^2}{2\times(-4)}=48 \Leftrightarrow b^2=\frac{-8\times 48}{3}$ impossível, logo $\vec{u}$ não pode ser paralelo à reta s

$\vec{u}$ paralelo à reta $r: y=ax+b$, o vetor diretor de r é $\vec{r}(1,a)$

Assim, $\vec{u}=k\vec{r} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)=k(1,a) \Leftrightarrow \begin{cases}k=\frac{1}{4}\\ a\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=\frac{1}{4}\\ a=2\end{cases}$

Então, $\frac{3b^2}{2\times 2}=48 \Leftrightarrow b^2=\frac{4\times 48}{3} \Leftrightarrow b^2=64 \underset{b>0}{\Leftrightarrow} b=8$

Logo, as coordenadas de:

$A\left(-\frac{b}{a},0\right)=(-4,0)$, $B(0,8)$ e $C\left(\frac{2b}{a},0\right)=(8,0)$

$\overline{AB}=\sqrt{(-4-0)^2+(0-8)^2}=4\sqrt{5}$

$\overline{AC}=\sqrt{(-4-8)^2}=12$

$\overline{BC}=\sqrt{(0-8)^2+(8-0)^2}=8\sqrt{2}$

$\therefore\ P_{[ABC]}=12+4\sqrt{5}+8\sqrt{2}$