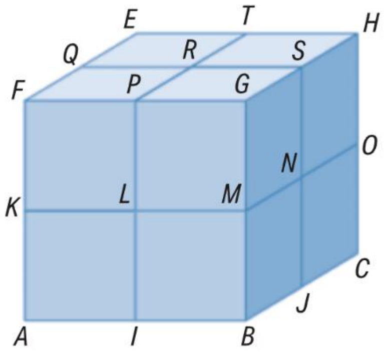
Cálculo Vetorial Espaço	Vetores Coordenadas de um vetor Operações	GEOM

1. Na figura está representado o cubo $[ABCDEFGH]$, formado por oito cubos iguais.



1.1. Usando as letras da figura, indique um vetor que represente cada uma das seguintes expressões:

a) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{JO}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NH}=\overrightarrow{MH}$

b) $\overrightarrow{PL}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{KG}$

c) $\overrightarrow{LG}+\overrightarrow{ST}=\overrightarrow{LG}+\overrightarrow{GR}=\overrightarrow{LR}$

d) $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{RH}=\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FQ}+\overrightarrow{QT}=\overrightarrow{BT}$

e) $\overrightarrow{KL}-\overrightarrow{NT}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{ET}+\overrightarrow{TN}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{EN}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{QC}$

f) $\overrightarrow{KR}-\overrightarrow{FS}-\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{KR}+\overrightarrow{SF}+\overrightarrow{FL}=\overrightarrow{KR}+\overrightarrow{SL}=\overrightarrow{KR}+\overrightarrow{RK}=\overrightarrow{KR}-\overrightarrow{KR}=\vec{0}$

1.2. Identifique os pontos representados pelas seguintes expressões:

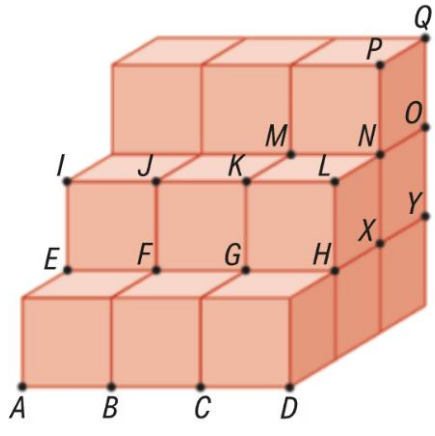
a) $F+\overrightarrow{LN}=F+\overrightarrow{FR}=R$

b) $R+\overrightarrow{PL}+\overrightarrow{IB}=R+\overrightarrow{PL}+\overrightarrow{LM}=R+\overrightarrow{PM}=R+\overrightarrow{RN}=N$

c) $T+\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{AF}=T+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{FA}=T+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GB}=T+\overrightarrow{OB}=T+\overrightarrow{TL}=L$

d) $A+\overrightarrow{BS}-\overrightarrow{RQ}+\overrightarrow{LN}=A+\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{LN}=Q+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{LN}=R+\overrightarrow{RH}=H$

2. O sólido representado na figura é formado por cubos com uma unidade de aresta. Sabe-se que os cubos contíguos têm uma face comum.



2.1. Usando letras da figura, indique os vetores com origem no ponto A que represente cada uma das expressões:

a) $\overrightarrow{BD}-2\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AM}$

b) $\overrightarrow{FP}-\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{FP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KJ}=\overrightarrow{AJ}$

2.2. Calcule:

a) $\left\|\overrightarrow{FK}-\overrightarrow{GB}\right\|$

$\left\|\overrightarrow{FK}-\overrightarrow{GB}\right\|=\left\|\overrightarrow{FK}+\overrightarrow{BG}\right\|=\left\|\overrightarrow{FK}+\overrightarrow{KP}\right\|=\left\|\overrightarrow{FP}\right\|$

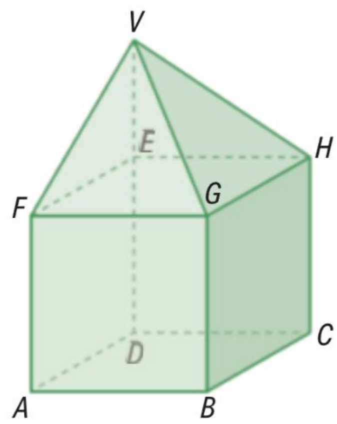
$\left\|\overrightarrow{FP}\right\|=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3$

b) $\left\|\overrightarrow{HM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{NB}\right\|$

$\left\|\overrightarrow{HM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{NB}\right\|=\left\|\overrightarrow{HM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BN}\right\|=\left\|\overrightarrow{HM}+\overrightarrow{MQ}\right\|=\left\|\overrightarrow{HQ}\right\|$

$\left\|\overrightarrow{HQ}\right\|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

3. Na figura, estão representados o cubo $[ABCDEFGH]$ der aresta 3 e a pirâmide $[EFGHV]$ em que o vértice E pertence a $[DV]$.



Sabe-se que o volume do sólido formado pelo cubo e pela pirâmide é igual a 33.

3.1. Mostre que $\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{GD}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}\right)+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AD}\right)=2\overrightarrow{AD}+\left(\overrightarrow{DH}-\overrightarrow{HD}\right)=$$
$$=2\overrightarrow{AD}+\vec{0}=2\overrightarrow{AD} \quad \text{c.q.m.}$$

3.2. Mostre que $\left\|\overrightarrow{EV}\right\|=2$

$$V_{\text{sólido}}=V_{\text{cubo}}+V_{\text{pirâmide}} \Leftrightarrow 33=3^3+\frac{1}{3}\times 3^2\times\left\|\overrightarrow{EV}\right\| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 33=27+3\left\|\overrightarrow{EV}\right\| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{EV}\right\|=2 \quad \text{c.q.m.}$$

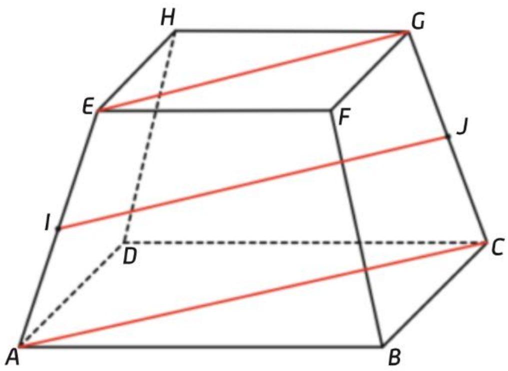
3.3. Justifiques que existe $k\in IR$ tal que $\overrightarrow{GB}=k\overrightarrow{EV}$ e determine o valor de k.

Os vetores $\overrightarrow{EV}$ e $\overrightarrow{GB}$ são colineares.

$$\left\|\overrightarrow{GB}\right\|=\left\|k\overrightarrow{EV}\right\| \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{GB}\right\|=|k|\left\|\overrightarrow{EV}\right\| \Leftrightarrow 3=|k|2 \Leftrightarrow |k|=\frac{3}{2}$$

Como os vetores $\overrightarrow{EV}$ e $\overrightarrow{GB}$ tem sentidos opostos, temos que $k<0$, isto é, $k=-\frac{3}{2}$

4. Na figura está representado um tronco de uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDEFGH]$.



Sabe-se que:

- os pontos I e J são pontos médios das arestas $[AE]$ e $[CG]$, respetivamente;
- $[ABCD]//[EFGH]$.

4.1. Prove que $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EG}=2\overrightarrow{IJ}$.

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EG}=\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}\right)+\left(\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JG}\right)=\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{EI}\right)+\left(\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IJ}\right)+\left(\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JG}\right)=$$
$$=\underbrace{\left(\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IE}\right)}_{\substack{\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IE} \\ I \text{ é ponto médio} \\ \text{de } [AE]}}+2\overrightarrow{IJ}+\underbrace{\left(\overrightarrow{JC}-\overrightarrow{GJ}\right)}_{\substack{\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{JG} \\ J \text{ é ponto médio} \\ \text{de } [CG]}}=\vec{0}+2\overrightarrow{IJ}+\vec{0}=2\overrightarrow{IJ} \quad \text{c.q.m.}$$

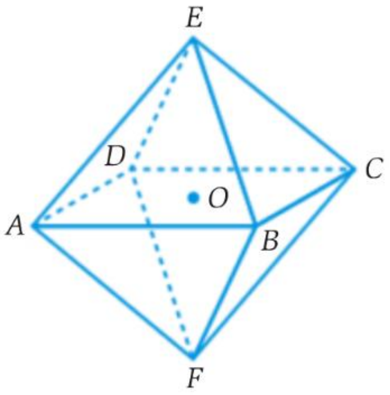
4.2. Complete:

a) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{BG}$

b) $\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{JG}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}$

c) $\overrightarrow{AI}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EG}\right)=\overrightarrow{AI}+\frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{IJ}\right)=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AJ}$

5. Considere o octaedro regular da figura. O ponto O é o ponto médio de $[AC]$ e $[DF]$.



5.1. Indique, usando as letras da figura:

a) Um vetor simétrico a $\overrightarrow{BC}$, não recorrendo as letras B e C .

$\overrightarrow{DA}$

b) Dois vetores colineares e com a mesma norma.

$\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, por exemplo

c) Dois vetores não colineares e com normas diferentes.

$\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BF}$, por exemplo

d) O representante do vetor $\overrightarrow{DC}$, com origem no ponto A .

$\overrightarrow{AB}$

5.2. Determine:

a) $A+\overrightarrow{BC}=A+\overrightarrow{AD}=D$

b) $A-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=A+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=O$

c) $\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{FC}$

d) $\overrightarrow{CE}-(E-F)=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CF}$

6. Na figura está representado um segmento de reta, $[AB]$.

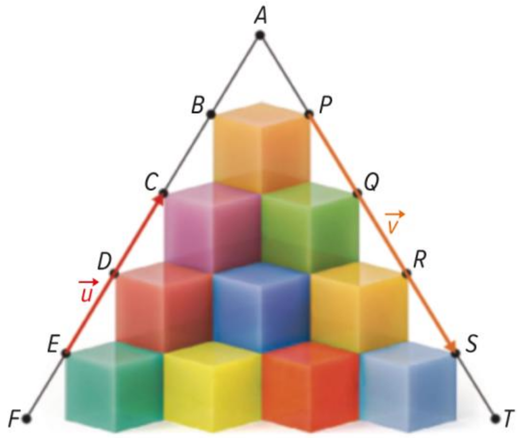
Sabe-se que:

- os pontos M e C pertencem a $[AB]$;
- M é o ponto médio de $[AC]$;
- $\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Mostre que $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ c.q.m.

7. Na figura estão representados dois vetores, $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Sabe-se que pontos assinalados e consecutivos, na mesma reta, estão a igual distância.



7.1. A partir da informação da figura, dê exemplo de um representante do vetor.

a) $2\vec{u} = 2\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA}$, por exemplo

b) $-\frac{1}{3}\vec{v} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{PS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{TS}$, por exemplo

c) $\frac{3}{2}\vec{u} = \frac{3}{2}\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EB}$

d) $\frac{5}{3}\vec{v} = \frac{5}{3}\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{AT}$

e) $-\frac{5}{2}\vec{u} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{EC} = \frac{5}{2}\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AF}$

f) $\frac{2}{3}\vec{v} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PR}$

7.2. Sabendo que $\|\vec{u}\| = \frac{5}{2}$ determine $\|\overrightarrow{AE}\|$

$\|\overrightarrow{AE}\| = 2\|\vec{u}\| = 2 \times \frac{5}{2} = 5$

8. Considere, fixado um referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(-4,3,2)$, $B(-1,2,-2)$ e $C(3,4,-8)$.

Determine as coordenadas de:

8.1. $B - 2\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (3,4,-8) - (-1,2,-2) = (4,2,-6)$

$B - 2\overrightarrow{BC} = (-1,2,-2) - 2\times(4,2,-6) = (-1,2,-2) - (8,4,-12) = (-9,-2,10)$

8.2. $\overrightarrow{AB} + 2\left(-2\overrightarrow{BC}\right)$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,2,-2) - (-4,3,2) = (3,-1,-4)$

$\overrightarrow{AB} + 2\left(-2\overrightarrow{BC}\right) = \overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{BC} = (3,-1,-4) - 4(4,2,-6) = (3,-1,-4) - (16,8,-24) = (-13,-9,20)$

8.3. $2\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

$2\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = 2(3,-1,-4) - \frac{3}{2}(4,2,-6) = (6,-2,-8) - (6,3,-9) = (0,-5,1)$

8.4. $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{CA} = C - A = (3,4,-8) - (-4,3,2) = (7,1,-10)$

9. Para determinados números reais a e b, considere, fixado um referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(a,-1,-3)$, $B(0,2,b)$ e $C(b+1,-4,-9)$.

Determine os valores de a e b, sabendo que os pontos A, B e C.

Como A, B e C então os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, são colineares.

$\overrightarrow{AC} = C - A = (b+1,-4,-9)-(a,-1,-3)=(b-a+1,-3,-6)$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (0,2,b)-(a,-1,-3)=(-a,3,b+3)$

Assim, $\frac{b-a+1}{-a}=\frac{-3}{3}=\frac{-6}{b+3} \Leftrightarrow \frac{b-a+1}{-a}=\frac{-3}{3} \wedge \frac{-3}{3}=\frac{-6}{b+3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{b-a+1}{-a}=-1 \wedge -1=\frac{-6}{b+3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b-a+1=a \wedge -b-3=-6 \wedge (a\neq 0 \wedge b\neq -3)$

$\Leftrightarrow 3+1=2a \wedge b=3 \wedge (a\neq 0 \wedge b\neq -3)$

$\Leftrightarrow a=2 \wedge b=3 \wedge (a\neq 0 \wedge b\neq -3)$

10. Em relação a um referencial o.n. $(O,\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$, considere os vetores:

$$\vec{u}(-5,5,2) \quad \text{e} \quad \vec{v}\left(-2,2,\frac{8}{10}\right)$$

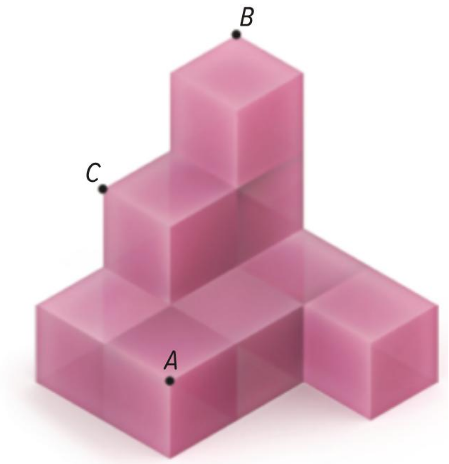
Mostre que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares.

$\frac{-5}{-2}=\frac{5}{2}=\frac{2}{\frac{8}{10}} \Leftrightarrow \frac{5}{2}=\frac{5}{2}=\frac{20}{8} \Leftrightarrow \frac{5}{2}=\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$

Logo, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares

11. Em relação a um referencial o.n. $Oxyz$, os pontos A, B e C, representados na figura, formada por cubos geometricamente iguais, têm as seguintes coordenadas:

$$A(2,1,0),\ B(-1,-1,2) \ \text{e} \ C(1,-1,1)$$



Mostre que $P+\overrightarrow{BC}=A$, sendo P o ponto de coordenadas $(0,1,1)$.

$\overrightarrow{BC}=C-B=(1,-1,1)-(-1,-1,2)=(2,0,-1)$

$P+\overrightarrow{BC}=(0,1,1)+(2,0,-1)=(2,1,0)$ c.q.m.

12. Considere, fixado um referencial ortonormado $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\right)$, os pontos $A(-2,-1,4)$ e $B(1,-3,2)$ e os vetores $\vec{u}(-1,4,0)$ e $\vec{v}\left(-2,3,\frac{1}{2}\right)$.

Determine as coordenadas do vetor:

12.1. $\vec{w}$ tal que $2\vec{v}+\vec{w}=\overrightarrow{AB}+\vec{u}$

$\overrightarrow{AB}=B-A=(1,-3,2)-(-2,-1,4)=(3,-2,-2)$

$2\vec{v}+\vec{w}=\overrightarrow{AB}+\vec{u}\Leftrightarrow\vec{w}=\overrightarrow{AB}+\vec{u}-2\vec{v}\Leftrightarrow\vec{w}=(3,-2,-2)+(-1,4,0)-2\left(-2,3,\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\vec{w}=(2,-2,-2)-(-4,6,1)\Leftrightarrow\vec{w}=(6,-4,-3)$

12.2. $\vec{x}$ tal que $\frac{1}{2}\vec{x}+\vec{u}=-2\vec{v}$

$\frac{1}{2}\vec{x}+\vec{u}=-2\vec{v}\Leftrightarrow\vec{x}=-2\vec{u}-4\vec{v}\Leftrightarrow\vec{x}=-2(-1,4,0)-4\left(-2,3,\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow\vec{x}=(2,-8,0)-(-8,12,2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\vec{x}=(10,-20,-2)$

12.3. $\vec{y}$ tal que $\frac{3}{2}\vec{v}=2\vec{y}-\frac{1}{2}\vec{u}+2\overrightarrow{BA}$

$\frac{3}{2}\vec{v}=2\vec{y}-\frac{1}{2}\vec{u}+2\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow2\vec{y}=\frac{3}{2}\vec{v}+\frac{1}{2}\vec{u}-2\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow\vec{y}=\frac{3}{4}\vec{v}+\frac{1}{4}\vec{u}+\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\vec{y}=\frac{3}{4}\left(-2,3,\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}(-1,4,0)+(3,-2,-2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\vec{y}=\left(-\frac{3}{2},\frac{9}{4},\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{1}{4},1,0\right)+(3,-2,-2)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\vec{y}=\left(\frac{5}{4},\frac{5}{4},-\frac{13}{8}\right)$

12.4. $\vec{t}$ tal que $2\vec{e_1}+\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{t}+\vec{e_2}-3\vec{v}$

$2\vec{e_1}+\vec{u}=\frac{1}{2}\vec{t}+\vec{e_2}-3\vec{v}\Leftrightarrow\vec{t}=4\vec{e_1}+2\vec{u}-2\vec{e_2}+6\vec{v}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\vec{t}=4(1,0,0)+2(-1,4,0)-2(0,1,0)+6\left(-2,3,\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow$

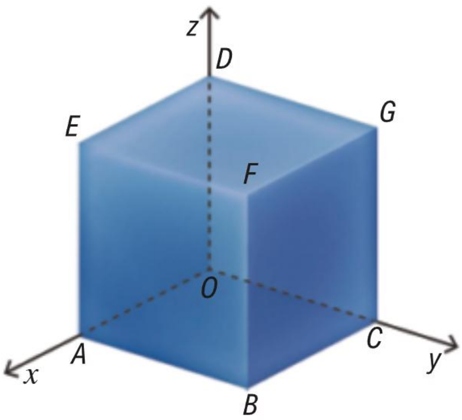
$\Leftrightarrow\vec{t}=(4,0,0)+(-2,8,0)-(0,2,0)+(-12,18,3)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\vec{t}=(-10,24,3)$

13. No referencial o.n. $Oxyz$, está representado o cubo $[OABCDEFG]$ de volume 8.

Sabe-se que:

- os vértices A, C e D pertencem aos semieixos positivos Ox, Oy e Oz, respetivamente;
- o ponto P é tal que $\overrightarrow{BP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$.



Determine as coordenadas do ponto P.

$V_{\text{cubo}} = 8 \Leftrightarrow a = 2$

$A(2,0,0)$, $B(2,2,0)$ e $G(0,2,2)$

Seja $P(x,y,z)$

$\overrightarrow{BP} = P - B = (x,y,z) - (2,2,0) = (x-2, y-2, z)$

$\overrightarrow{AG} = G - A = (0,2,2) - (2,0,0) = (-2,2,2)$

$$\overrightarrow{BP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow (x-2, y-2, z) = \frac{3}{4}(-2,2,2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = -\frac{3}{2} \\ y-2 = \frac{3}{2} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{7}{2} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Portanto as coordenadas de $P\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$

14. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o ponto $P(1,0,-1)$ e o vetor $\vec{u}(1,-2,1)$.

Determine as coordenadas do ponto Q tal que o vetor $\overrightarrow{PQ}$ tenha norma 6 e seja colinear, e com o mesmo sentido, do vetor $\vec{u}$.

Seja $Q(x,y,z)$ um ponto.

Sabemos que $\|\overrightarrow{PQ}\|=6$ e $\overrightarrow{PQ}=k\vec{u}$

$\overrightarrow{PQ}=Q-P=(x,y,z)-(1,0,-1)=(x-1,y,z+1)$

$k\vec{u}=(k,-2k,k)$

Como $\overrightarrow{PQ}=k\vec{u}$, então $\|\overrightarrow{PQ}\|=6 \Leftrightarrow \|k\vec{u}\|=6 \Leftrightarrow \sqrt{k^2+(-2k)^2+k^2}=6 \Leftrightarrow \sqrt{6k^2}=6 \Leftrightarrow 6k^2=36 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow k^2=6 \Leftrightarrow k=-\sqrt{6} \vee k=\sqrt{6} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{\overrightarrow{PQ} \text{ e } \vec{u} \\ \text{têm o mesmo} \\ \text{sentido}}} k=\sqrt{6}$$

Assim, $k\vec{u}=(\sqrt{6},-2\sqrt{6},\sqrt{6})$

Logo, $\overrightarrow{PQ}=k\vec{u} \Leftrightarrow (x-1,y,z+1)=(\sqrt{6},-2\sqrt{6},\sqrt{6}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x-1=\sqrt{6} \wedge y=-2\sqrt{6} \wedge z+1=\sqrt{6} \Leftrightarrow$$

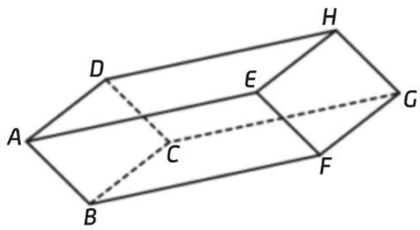
$$\Leftrightarrow x=1+\sqrt{6} \wedge y=-2\sqrt{6} \wedge z=-1+\sqrt{6}$$

$\therefore Q(1+\sqrt{6},-2\sqrt{6},-1+\sqrt{6})$

15. Na figura está representado um prisma quadrangular regular $[ABCEDFGH]$.

Sabe-se que:

- $A(3,0,0)$, $C(4,-7,0)$ e $D(7,-3,0)$;
- $\overrightarrow{BF}(0,0,6)$.



15.1. Prove que o ponto B pertence ao eixo Oy e determine as coordenadas de H.

$B=A+\overrightarrow{AB}=A+\overrightarrow{DC}=A+(C-D)=(3,0,0)+[(4,-7,0)-(7,-3,0)]=(3,0,0)+\underbrace{(-3,-4,0)}_{\overrightarrow{DC}}=$

$=(0,-4,0)$, logo B pertence a Oy

$H=D+\overrightarrow{DH}=D+\overrightarrow{BF}=(7,-3,0)+(0,0,6)=(7,-3,6)$

15.2. Determine o volume do prisma $[ABCDEFGH]$.

$\|\overrightarrow{BF}\|=\sqrt{0^2+0^2+6^2}=6$

$\|\overrightarrow{DC}\|=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2+0}=\sqrt{25}=5$

$A_{[ABCDEFGH]}=\overline{DC}^2\times\overline{BF}=5^2\times 6=150$

16. Considere, fixado um referencial o.n. $Oxyz$, os pontos $A(3,1,-2)$, $B(1,5,-6)$ e $C(a,1-a,a-2)$, $a \in IR$.

16.1. Determine, caso exista, o valor de a para os quais os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ são colineares.

$\overrightarrow{AB} = B - A = (1,5,-6)-(3,1,-2) = (-2,4,-4)$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (a,1-a,a-2)-(3,1,-2) = (a-3,-a,a)$

$$\frac{a-3}{-2} = \frac{-a}{4} = \frac{a}{-4} \Leftrightarrow -2a+6 = -a \Leftrightarrow a = 6$$

16.2. Verifique se existe $a \in IR$ para o qual C é o ponto médio de $[AB]$.

Ponto médio de $[AB]$: $M_{[AB]} = \left(\frac{3+1}{2}, \frac{1+5}{2}, \frac{-2-6}{2}\right) = (2,3,-4)$

$$C = M \Leftrightarrow (a,1-a,a-2) = (2,3,-4) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 1-a = 3 \\ a-2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \\ a = -2 \end{cases}$$ condição impossível.

Logo, não existe $a \in IR$ para o qual C é ponto médio de $[AB]$

16.3. Determine as coordenadas do ponto E, sabendo que B pertence ao segmento $[AE]$ e $\left\|\overrightarrow{AE}\right\| = 15$.

$\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB}$, com $k > 0$ e $\left\|\overrightarrow{AE}\right\| = 15$

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2} = 6$

$\left\|\overrightarrow{AE}\right\| = 15 \Leftrightarrow \left\|k\overrightarrow{AB}\right\| = 15 \Leftrightarrow |k|\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = 15 \Leftrightarrow |k|6 = 15 \Leftrightarrow k = \frac{15}{6} \Leftrightarrow k = \frac{5}{2}$

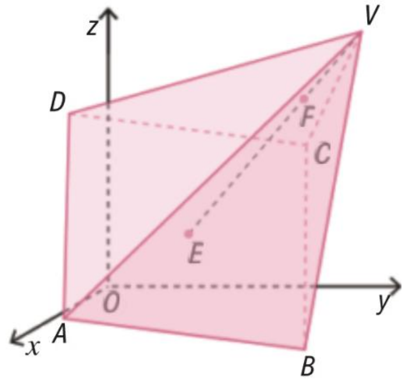
Como $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{5}{2}(-2,4,-4) \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = (-5,10,-10)$

$E = A + \overrightarrow{AE} = (3,1,-2) + (-5,10,-10) = (-2,11,-12)$

17. Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$.

Sabe-se que:

- o volume da pirâmide é igual a 108 unidades cúbicas;
- o ponto E é o centro da base da pirâmide;
- o ponto F pertence ao segmento de reta $[EV]$;
- os pontos A, C e F têm coordenadas $(6,2,1)$, $(-2,4,3)$ e $(4,7,6)$ respetivamente.



17.1. Mostre que o ponto E tem coordenadas $(2,3,2)$.

E é o ponto médio de $[AC]$

$$E\left(\frac{6-2}{2},\frac{2+4}{2},\frac{1+3}{2}\right)=(2,3,2) \quad \text{c.q.m.}$$

17.2. Determine a norma do vetor $\overrightarrow{EF}$.

$$\overrightarrow{EF}=F-E=(4,7,6)-(2,3,2)=(2,4,4)$$

$$\left\|\overrightarrow{EF}\right\|=\sqrt{2^2+4^2+4^2}=6$$

17.3. Mostre que $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=6$.

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 \underset{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}{\Leftrightarrow} \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2=2\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC}\right\|$$

$$\boxed{\text{C.A.: } \overrightarrow{AC}=C-A=(-2,4,3)-(6,2,1)=(-8,2,2)}$$

$$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{(-8)^2+2^2+2^2}\right)^2 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{72}\right)^2 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2=36 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{AB}\right\|=6$$

17.4. Justifique que $\left\|\overrightarrow{EV}\right\|=9$.

$$V=108 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2\times\left\|\overrightarrow{EV}\right\|=108 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\times 36\times\left\|\overrightarrow{EV}\right\|=108 \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{EV}\right\|=\frac{108}{12} \Leftrightarrow \left\|\overrightarrow{EV}\right\|=9$$

17.5. Determine as coordenadas do ponto V.

$$V=E+\overrightarrow{EV}$$

$\overrightarrow{EV}=k\overrightarrow{EF}$, $k>0$ e $\left\|\overrightarrow{EV}\right\|=\left\|k\overrightarrow{EF}\right\|=9$

$$\left\|k\overrightarrow{EF}\right\|=9 \Leftrightarrow |k|\left\|\overrightarrow{EF}\right\|=9 \Leftrightarrow |k|\times 6=9 \Leftrightarrow k=\frac{3}{2}$$

Assim, $\overrightarrow{EV}=\frac{3}{2}(2,4,4)=(3,6,6)$

$$V=E+\overrightarrow{EV}=(2,3,2)+(3,6,6)=(5,9,8)$$

17.6. Determine as coordenadas do ponto D, sabendo que B tem coordenadas $(2,6,-1)$.

$$\overrightarrow{BE}=E-B=(2,3,2)-(2,6,-1)=(0,-3,3)$$

$$D=E+\overrightarrow{ED}=E+\overrightarrow{BE}=(2,3,2)+(0,-3,3)=(2,0,5)$$